

Морфизмы полусхем и их приложения

Т. В. Семенова

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

In the article the instrument of semischeme mapping using morphisms is suggested. The possibility of using semischemes and semischeme morphisms for describing tools of modelling and mapping of one mathematical apparatus concepts on concepts of another one is showed. The example of the transfer from model built using Petri nets to the model built on the base of the time probability graph using semischeme morphisms is showed

1. Постановка проблемы. Математическое моделирование является общепринятым средством исследования сложных систем. Для получения наиболее полной информации о системе исследователь, как правило, производит построение нескольких моделей (аналитических и имитационных), используя различные математические аппараты. Особенностью такого подхода является невозможность использования уже построенных моделей для разработки последующих. Следовательно, необходим инструмент, который бы позволил описывать понятия различных средств моделирования и строить отображение между ними.

2. Анализ публикаций и постановка задачи. В статье [1] представлена формальная модель описания понятий различных предметных областей, средствами полусхем. В частности, этот подход может быть применен для описания средств математического моделирования. Тогда, актуальной становится задача разработки механизма отображения понятий одного математического аппарата на понятия другого.

В качестве примера в статье рассмотрен процесс описания аппаратов сетей Петри [2] и вероятностно временных графов (ВВГ) [3], средствами полусхем. После чего доказана возможность перехода от модели построенной с помощью сетей Петри к модели построенной с помощью ВВГ путем задания некоторого морфизма полусхем.

Автор выражает благодарность профессору Жолткевичу Г.Н., обратившему ее внимание на возможность применения теории категорий для исследования полусхем, а также Дуравкину Е.В., в процессе обсуждения статьи с которым возник основной пример содержательного морфизма.

3. Основная часть. Выше было указано, что понятия предметной области описываются средствами полусхем. Следовательно, необходимо разработать механизм отображения одной полусхемы на другую. Один из методов решения данной задачи базируется на использовании морфизмов.

Определим понятие морфизма для полусхем и исследуем критерий существования изоморфизма между двумя полусхемами.

Определение

Пусть $S_1(N_1, R_1, D_1)$ и $S_2(N_2, R_2, D_2)$ - полусхемы. **Морфизмом** $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ назовем пару отображений $\varphi = (\varphi_N, \varphi_R)$ таких, что $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$ и выполнено соотношение:

$$(\forall n \in N_1)(\forall f \in nD_1)(\exists g \in \varphi_N(n)D_2) \quad \varphi_N \circ f = g \circ \varphi_R.$$

Утверждение

Пусть $S_1(N_1, R_1, D_1)$ и $S_2(N_2, R_2, D_2)$ - полусхемы.

$\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ - морфизм такой, что $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$ - инъективные отображения. Тогда φ является мономорфизмом.

Доказательство.

В силу определения, φ является мономорфизмом, если для любой полусхемы $S(N, R, D)$ и любых двух морфизмов ψ' и ψ'' , действующих из S в S_1 выполнено соотношение $\psi' \neq \psi'' \Rightarrow \varphi \circ \psi' \neq \varphi \circ \psi''$.

Пусть ψ' и ψ'' - морфизмы, действующие из S в S_1 , такие, что $\psi' \neq \psi''$. Тогда выполнено хотя бы одно из двух соотношений:

1. $(\exists n \in N) \quad \psi'_N(n) \neq \psi''_N(n)$
2. $(\exists r \in R) \quad \psi'_R(r) \neq \psi''_R(r)$

Для определенности будем считать, что выполнено первое утверждение (для второго случая утверждения проводятся аналогично).

Таким образом, для некоторого понятия n из N выполнено $\psi'_N(n) \neq \psi''_N(n)$. В силу инъективности φ_N имеем:

$$\varphi_N(\psi'_N(n)) \neq \varphi_N(\psi''_N(n)).$$

Следовательно,

$$\varphi \circ \psi' \neq \varphi \circ \psi''.$$

Доказательство завершено.

Утверждение

Пусть $S_1(N_1, R_1, D_1)$ и $S_2(N_2, R_2, D_2)$ - полусхемы.

$\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ - морфизм такой, что $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$.

Тогда φ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда отображения $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$ являются сюръективными.

Доказательство.

Проведем доказательство в одну сторону. Докажем достаточность.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что φ не является эпиморфизмом. Значит, существует такая полусхема $S(N, R, D)$ и морфизмы ψ' и ψ'' ($\psi' \neq \psi''$), действующих из S_2 в S , для которых выполнено $\varphi \circ \psi' = \varphi \circ \psi''$. Поскольку $\psi' \neq \psi''$, то выполнено хотя бы одно из двух соотношений:

$$1. (\exists n \in N) \quad \psi'_N(n) \neq \psi''_N(n)$$

$$2. (\exists r \in R) \quad \psi'_R(r) \neq \psi''_R(r)$$

Для определенности будем считать, что выполнено первое утверждение (для второго случая утверждения проводятся аналогично).

Таким образом, для некоторого понятия n из N_2 выполнено $\psi'_N(n) \neq \psi''_N(n)$.

В силу сюръективности φ_N имеем:

$$(\exists n' \in N_1) \quad \varphi_N(n') = n.$$

Следовательно,

$$\psi'(\varphi_N(n')) \neq \psi''(\varphi_N(n')).$$

Таким образом,

$$\psi' \circ \varphi \neq \psi'' \circ \varphi.$$

Полученное соотношение противоречит предположению.

Доказательство достаточности завершено.

Проведем доказательство в противоположную сторону. Пусть φ является эпиморфизмом. Покажем, что $\varphi_N : N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R : R_1 \rightarrow R_2$ - сюръективные отображения.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что одно из отображений φ_N или φ_R не является сюръективным. Для определенности будем считать, что это φ_N .

Тогда существует такое понятие n из N_2 у которого нет прообраза, то есть $(\exists n \in N_2)(\forall m \in N_1) \quad \varphi_N(m) \neq n$.

Построим полусхему $S(N, R, D)$ и отображения ψ' и ψ'' таким образом, чтобы нарушалось свойство эпиморфизма. Полученное противоречие и станет доказательством утверждения.

В качестве полусхемы $S(N, R, D)$ возьмем копию полусхемы S_2 , в которую добавлено еще одно понятие \tilde{n} с такой же структурой, как у n , то есть

$$N = N_2 \cup \{\tilde{n}\}$$

$$R = R_2$$

$$D = D_2 \cup D', \text{ где } D' = \{(\tilde{n}, f) \mid f \in nD_2\}.$$

Определим ψ' как тождественный морфизм. А ψ'' определим аналогично ψ' кроме действия на элементе n . Положим $\psi''_N(n) = \tilde{n}$. В силу определения полусхемы $S(N, R, D)$ ψ'' является морфизмом.

Таким образом,

$$(\forall r \in R_2) \quad \psi'_R(r) = \psi''_R(r)$$

$$(\forall m \in N_2 \setminus \{n\}) \quad \psi'_N(m) = \psi''_N(m)$$

$$\psi'_N(n) = n, \quad \psi''_N(n) = \tilde{n}$$

Поскольку у элемента n из N_2 нет прообраза, то

$$(\forall m \in N_1) \varphi_N(\psi'_N(m)) = \varphi_N(\psi''_N(m)).$$

Следовательно, $\psi' \circ \varphi = \psi'' \circ \varphi$ при $\psi' \neq \psi''$. Это противоречит изначальному условию о том, что φ является эпиморфизмом.

Доказательство необходимости завершено.

Утверждение доказано полностью.

Утверждение

Пусть $S_1(N_1, R_1, D_1)$ и $S_2(N_2, R_2, D_2)$ - полусхемы.

Морфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ является изоморфизмом, если φ является биморфизмом и $\tilde{\varphi}(\varphi_N^{-1}, \varphi_R^{-1})$ является морфизмом из S_2 в S_1 .

Доказательство.

В силу определения, $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ является изоморфизмом, если существует такой морфизм $\psi: S_2 \rightarrow S_1$, что $\psi \circ \varphi = 1_{S_1}$ и $\varphi \circ \psi = 1_{S_2}$.

Возьмем в качестве морфизма $\psi: S_2 \rightarrow S_1$ морфизм. Очевидно, что в этом случае, оба соотношения $\psi \circ \varphi = 1_{S_1}$ и $\varphi \circ \psi = 1_{S_2}$ выполнены.

Доказательство завершено.

Рассмотрим возможность использования разработанного механизма отображения полусхем на конкретных средствах математического моделирования. В качестве средства имитационного моделирования выбран аппарат сетей Петри, как наиболее часто используемый при анализе информационно-вычислительных систем. В качестве средства аналитического моделирования был выбран аппарат ВВГ, обладающий широкими возможностями при анализе систем.

Временная маркированная сеть Петри (СП): $C = (P, T, I, O, A)$, где

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ - конечное множество позиций СП,

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ - конечное множество переходов СП,

I - входная функция переходов, которая определяется как отображение $I: P \times T \rightarrow B$, где $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ - множество вероятностей перехода,

O - выходная функция переходов, которая определяется как отображение $O: T \times P \rightarrow B$

A - временная функция переходов, которая определяется как отображение $A: T \rightarrow \mathbb{R}$, где \mathbb{R} задает время перехода.

Тогда инцидентность позиций p_i и p_j через переход t_k характеризуется парой:

$t_{ij} = A(t_k)$ - время перехода,

$p_{ij} = I((p_i, t_k)) \cdot O((t_k, p_j))$ - вероятность перехода

Представим описание аппарата временных маркированных сетей Петри в терминах полусхем.

Множество терминальных понятий $N_0 = \{\text{Целое, Вещественное}\}$,
множество понятий $N_1 = \{\text{Инцидентность, Позиция, Переход}\} \cup N_0$;

множество ролей $R_1 = \{\text{Начальная позиция, Конечная позиция, Функция перехода, Идентификатор, Вероятность, Время}\}$;

набор частично определенных функций f_1, f_2, f_3 :

f_1 :

$f_1(\text{Начальная позиция}) = \text{Позиция}$

$f_1(\text{Конечная позиция}) = \text{Позиция}$

$f_1(\text{Функция перехода}) = \text{Переход}$

f_2 :

$f_2(\text{Идентификатор}) = \text{Целое}$

f_3 :

$f_3(\text{Вероятность}) = \text{Вещественное}$

$f_3(\text{Время}) = \text{Вещественное}$

Множество $D_1 = \{(\text{Инцидентность}, f_1), (\text{Позиция}, f_2), (\text{Переход}, f_3)\}$.

Применяя алгоритмы, описанные в [1], легко увидеть, что описанная таким образом полусхема $S_1 = (N_1, R_1, D_1)$ является схемой.

Приведенное формальное описание представлено в графическом виде на рис. 1.



Рис. 1. Схема, описывающая сеть Петри

Вероятностно-временной граф: $G = (V, P, T, M)$, где

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - множество вершин,

P - функция, задающая вероятностную характеристику дуги, которая определяется как отображение $P: V \times V \rightarrow B$, где $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ - множество вероятностей (обозначим $P((v_i, v_j)) = P_{ij}$),

T - функция, задающая временную характеристику дуги, которая определяется как отображение $T: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (обозначим $T((v_i, v_j)) = T_{ij}$),

F - множество функций вида $f(z) = p \cdot z^t$

M - функция, задающая вероятностно-временную характеристику дуги в виде функции из F , которая определяется как отображение $M: V \times V \rightarrow F$, т.е. паре (v_i, v_j) ставится в соответствие функция $P_{ij} \cdot z^{T_{ij}}$.

Представим описание аппарата вероятностно временного графа в терминах полусхем.

Множество терминальных понятий $N_0 = \{\text{Целое, Вещественное}\}$,
 множество понятий $N_2 = \{\text{Дуга, Вершина, Функция}\} \cup N_0$;

множество ролей $R_2 = \{\text{Вершина выхода, Вершина входа, Характеристика, Идентификатор, Вероятность, Время}\}$;

набор частично определенных функций f_1, f_2, f_3 :

f_1 :
 $f_1(\text{Вершина выхода}) = \text{Вершина}$
 $f_1(\text{Вершина входа}) = \text{Вершина}$
 $f_1(\text{Характеристика}) = \text{Функция}$

f_2 :

f_2 (Идентификатор) = Целое

f_3 :

f_3 (Вероятность) = Вещественное

f_3 (Время) = Вещественное

Множество $D_2 = \{(\text{Дуга}, f_1), (\text{Вершина}, f_2), (\text{Функция}, f_3)\}$.

Применяя алгоритмы, описанные в [1], легко увидеть, что описанная таким образом полусхема $S_2 = (N_2, R_2, D_2)$ является схемой.

Приведенное формальное описание представлено в графическом виде на Рис. 2.



Рис. 2. Схема, описывающая ВВГ

Применение алгоритмов, описанных в [1], к построенным полусхемам $S_2 = (N_2, R_2, D_2)$

Зададим отображение $\varphi(\varphi_R, \varphi_N): S_1 \rightarrow S_2$ для построенных схем, которое действует следующим образом:

φ_R (Начальная позиция) = Вершина выхода

φ_R (Конечная позиция) = Вершина входа

φ_R (Функция перехода) = Характеристике

φ_R (Вероятность) = Вероятность

φ_R (Время) = Время

φ_R (Идентификатор) = Идентификатор

φ_N (Инцидентность) = Дуга

φ_N (Позиция) = Вершина

φ_N (Переход) = Функция

φ_N (Целое) = Целое

φ_N (Вещественное) = Вещественное

Легко показать, что приведенное отображение является морфизмом. Полученный результат позволяет утверждать, что имитационная модель,

представленная временной сетью Петри может быть отображена на аналитическую модель, построенную с помощью ВВГ.

Рассмотрим полученный результат на примере. Покажем, как сеть Петри может быть использована для построения ВВГ.

Изображенная на Рис. 3 временная маркированная сеть Петри имеет:

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ - множество позиций

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ - множество переходов,

значения входной функции переходов $I(p_1, t_1) = 1, I(p_1, t_2) = 0,5, I(p_2, t_2) = 0,5, I(p_3, t_3) = 0,5, I(p_4, t_3) = 0,5, I(p_4, t_4) = 0,5, I(p_5, t_5) = 1,$ остальные $I(p_i, t_j) = 0,$

значения выходной функции переходов $O(t_i, p_j) = 0$ для всех i и $j,$

значения временной функции переходов $A(t_1) = T_1, A(t_2) = T_2, A(t_3) = T_3, A(t_4) = T_4, A(t_5) = T_5.$

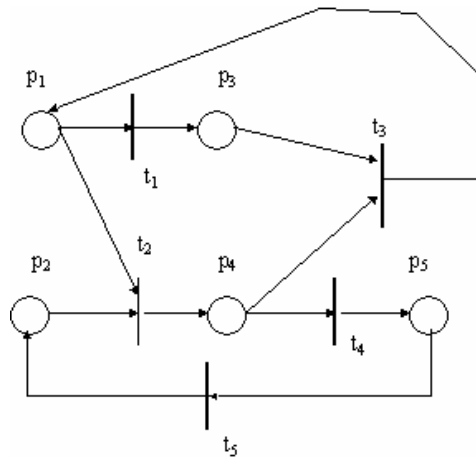


Рис. 3. Пример графа сети Петри

Изображенный на Рисунке 4 вероятностно временной граф имеет:

множество вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$

значения функции, задающей вероятностную характеристику дуг $P_{13} = P(v_1, v_3) = 1, P_{14} = P(v_1, v_4) = 0,5, P_{24} = P(v_2, v_4) = 0,5, P_{31} = P(v_3, v_1) = 0,5, P_{41} = P(v_4, v_1) = 0,5, P_{45} = P(v_4, v_5) = 1, P_{52} = P(v_5, v_2) = 1,$

значения функции, задающей временную характеристику дуг $T_{13} = T(v_1, v_3) = T_1, T_{14} = T(v_1, v_4) = T_2, T_{24} = T(v_2, v_4) = T_2, T_{31} = T(v_3, v_1) = T_3, T_{41} = T(v_4, v_1) = T_3, T_{45} = T(v_4, v_5) = T_4, T_{52} = T(v_5, v_2) = T_5,$

Тогда $f_1 = 1 \cdot z^{T_1}$, $f_2 = 0,5 \cdot z^{T_3}$, $f_3 = 0,5 \cdot z^{T_2}$, $f_4 = 0,5 \cdot z^{T_3}$, $f_5 = 1 \cdot z^{T_4}$,
 $f_6 = 1 \cdot z^{T_5}$, $f_7 = 0,5 \cdot z^{T_2}$.

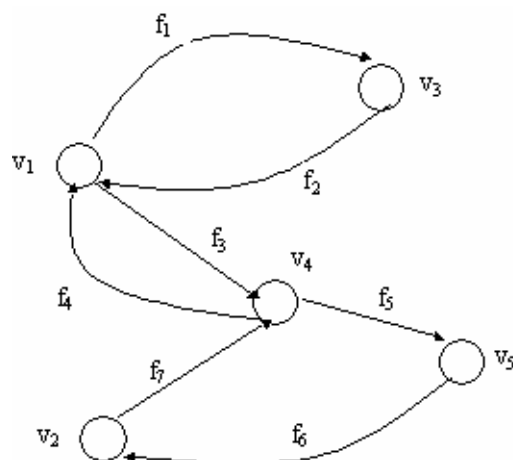


Рис. 4. ВВГ, эквивалентный сети Петри (Рис. 3)

4. Выводы. В статье разработан механизм отображения полусхем, описывающих различные математические аппараты. Разработанный механизм отображения базируется на понятии морфизма пролусхем. Это позволяет осуществлять переход между различными средствами, описывающими одну и ту же предметную область. В частности в статье была показана возможность перехода от имитационной модели, построенной на временных сетях Петри к аналитической модели, построенной на базе ВВГ.

Полученный результат позволяет упростить процесс анализа сложных систем, при котором требуется разработка как аналитических, так и имитационных моделей. Разработанный метод отображения моделей показывает один из способов использования аппарата полусхем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жолткевич Г.Н., Семенова Т.В. К проблеме формализации концептуального моделирования информационных систем // Вісник Харк. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". – Харків: ХНУ. – 2003. - № 605, вип. 2. – С. 33 - 43.
2. Мурата Т. Сети Петри: Свойства, анализ, приложения// ТИИЭР. №4. 1989.
3. Лосев Ю.И. и др. Автоматизированное управление в сетях с коммутацией пакетов. – К.: Техника, 1994. – 312 с.