

## Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель

Ю. В. Гандель, В. О. Мищенко

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

We had devoted the presenting work to the mathematical modeling of the electromagnetic wave scattering on flat screens in the presence of dielectric underground. The problem difficulty lies with the non-homogeneous nature of the space that surrounding screen. The system of hyper-singular integral equations was built by the method of parametrical representations of integral and pseudo-differential transformations. We can find the scattered field by solving this system. To solve such tasks numerically we succeeded to a generation of the discrete closed wind frames method to build the discrete model.

### 1. Введение в проблему

Принимающие (или передающие) антенны радиотехнических устройств могут нередко рассматриваться как плоские бесконечно тонкие идеально проводящие экраны, закрепленные на диэлектрической подложке. Форма экрана может быть самой разной и требовать задания размеров различных своих элементов. Понятно, что длина падающей (или возбуждаемой) электромагнитной волны, скорее всего, близка к одному из этих размеров. В дальнейшем для определенности будем говорить о рассеянии волн.

Ранее подходы к решению трёхмерных задач дифракции на проводящих экранах в пространстве [1-3] и задач дифракции на включениях в слоистых диэлектриках [4-5] развивались, преимущественно, по отдельности. Метод настоящей работы позволяет решать, задачи, объединяющие существенные элементы обеих указанных постановок. Он относится к классу «методов дискретных особенностей», для которых в настоящее время характерна тенденция к сведению эллиптических краевых задач к гиперсингулярным интегральным уравнениям (ГСИУ) или их системам с последующим построением на базе этих уравнений дискретных моделей по принципу коллокаций [6]. Впервые этот подход – сведение парных интегральных уравнений двумерной или трёхмерной задачи к гиперсингулярным интегральным уравнениям был сформулирован и применён в [7].

В данной работе для моделирования картины рассеяния волн на плоском экране (не обязательно связанном или односвязном) в качестве источника рассматривается монохроматическая волна, приходящая, скажем, в вакууме (или в неионизированном воздухе) от далёкого мощного излучателя в форме плоской волны. Ради избавления от громоздкости какая-либо экранирующая поверхность с противоположной стороны (стороны несущего диэлектрика) считается отсутствующей. Таким образом, слой несущего диэлектрика моделируется

полупространством с определёнными значениями электрической и магнитной проницаемостей. Требуется разработать дискретную математическую модель для подготовки вычислительных экспериментов по исследованию характеристик рассеяния, основанных на расчётах полей в дальней, средней или ближней зонах от экрана.

Вывод гиперсингулярных интегральных уравнений основан в данной работе на использовании параметрических представлений псевдодифференциальных и интегральных операторов. Это - прозрачный подход, который для задач в однородном пространстве разработан в [7] на примере поляризованных полей и для пространственно случая реализован в [8]. Для двумерных задач при наличии раздела диэлектрических сред этот подход развивается в [9]. Представляется, что альтернативные методы вывода ГСИУ, основанные на физическом понятии об эквивалентных токах или на технике функции Грина, для рассматриваемых здесь задач излишне сложны.

С другой стороны, основанный на базе параметрических представлений псевдодифференциальных операторов подход ограничивается тем условием на область распространения электромагнитных волн, что она должна быть представима объединением своих непересекающихся подобластей, в которых применимо построение общих решений методом разделения переменных. Это компенсируется наиболее простым учётом геометрии решаемой задачи для снижения числа неизвестных функций, связанных в решаемой системе ГСИУ, и упрощения работы с ними. При этом рациональный выбор неизвестных функций осуществляется не интуитивно, а в естественном процессе преобразования части краевых условий для исходных неизвестных в условия финитности новых функций, которые по этой причине удобно выбрать искомыми. В данной работе в качестве исходных неизвестных выступают две компоненты электрической составляющей электромагнитного поля.

## 2. Математическая постановка задачи

В трёхмерном пространстве  $X = R^3$ , точки которого будут обозначаться как

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \quad (x, y \in R^3)$$

Выделяются подобласти

$$\begin{aligned} X_+ &= \langle x \in R^3 \mid x_3 > 0 \rangle && \text{(индекса «плюс»)} \\ X_- &= \langle x \in R^3 \mid x_3 < 0 \rangle && \text{(индекса «минус»)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Связанные с ними величины, какие-либо элементы или функции при необходимости подчеркнуть их принадлежность будут снабжаться соответствующим индексом («плюс» или «минус»). Граничная плоскость

$$\Pi = \partial X_+ = \partial X_- = \langle x \in R^3 \mid x_3 = 0 \rangle \quad (2.2)$$

может отождествляться с  $R^2$ , в связи с чем вводятся обозначения

$$x = (x', x_3), \quad y = (y', y_3) \quad (x', y' \in R^2, \quad x_3, y_3 \in R)$$

Рассеивающий экран  $\Sigma$  моделируется с помощью ограниченной в  $R^2$  области  $\sigma$ , имеющей, скажем, кусочно-аналитическую границу  $\partial\sigma$ :

$$\Sigma = (\sigma, 0) = \langle x \in R^3 \mid x_3 = 0, \sigma \in R^2 \rangle \subset \Pi = (R^2, 0) \quad (2.3)$$

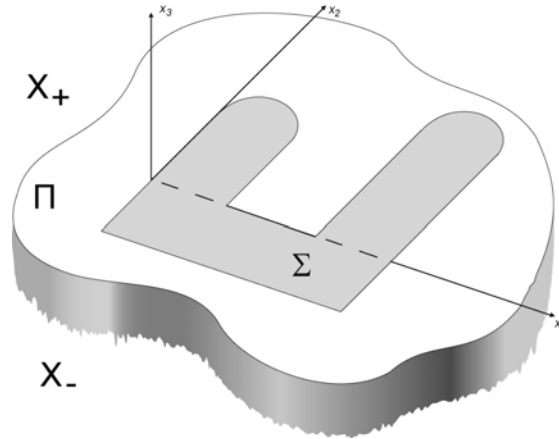


Рис.1. Экран  $\Sigma$  на поверхности диэлектрика, заполняющего область  $X_-$ .

Рассматриваются поля вида

$$E(x, t) = E \cdot \exp(-i\omega t), \quad H(x, t) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (2.4)$$

где

$$E = E(x) = (E_1, E_2, E_3), \quad H = H(x) = (H_1, H_2, H_3)$$

Стационарные уравнения Максвелла в кусочно-неоднородной среде имеют форму:

$$\operatorname{rot} H = -i \varepsilon_{\pm} \varepsilon_0 \omega \cdot E \quad (x \in X_{\pm}, \text{ i.e. } x_3 > 0 \text{ or } x_3 < 0), \quad (2.5)$$

$$\operatorname{rot} E = i \varepsilon_{\pm} \varepsilon_0 \omega \cdot H \quad (x \in X_{\pm}), \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{div} H = 0 \quad (x \notin \Pi, \text{ i.e. } x_3 = 0) \quad (2.7)$$

На границе раздела диэлектрических сред для тангенциальных составляющих, как это принято, потребуем:

$$i = 1, 2 \Rightarrow [E_i]_{-0}^{+0} = E_i(x', +0) - E_i(x', -0) = 0, \quad (2.8)$$

$$i = 1, 2 \Rightarrow [H_i]_{-0}^{+0} = 0, \quad (2.9)$$

Пусть  $(E^0, H^0)$  является решением системы (2.5)- (2.7), которое удовлетворяет (2.8)-(2.9) при всех  $x \in \Pi$  (т. е.,  $\forall x' \in R^2$ ) и имеет физический смысл падающего на экран поля. Тогда наблюдаемое полное поле  $(E^f, H^f)$  можно представить в виде

$$(E^f, H^f) = (E^0, H^0) + (E, H) \quad (x \in R^3 \setminus \Sigma) \quad (2.10)$$

где  $E, H$  - искомые вектор-функции, которым придаётся смысл рассеянного (дифрагированного) поля. Оно, конечно, удовлетворяет (2.5)- (2.7) и (2.8)-(2.9), но последнее полностью – только вне экрана  $\Sigma$ :

$$i = 1, 2 \Rightarrow [E_i]_{-0}^{+0} = 0, [H_i]_{-0}^{+0} = 0 \quad (x \in \Pi \setminus \Sigma) \quad (2.11)$$

На самом экране тангенциальные компоненты электрической составляющей полного поля обнуляются, так что

$$i = 1, 2 \Rightarrow E_i(x', +0) = -E_i^0(x', 0) = E_i(x', -0) \quad (x' \in \sigma) \quad (2.12)$$

На краю экрана требуется выполнение условия Майкснера, которое, как хорошо известно, в своей наиболее слабой форме ограничивает особенность поля вблизи края требованием конечности энергии электромагнитного поля. Поэтому выставляем условие

$$E, H \in L_2^{loc}(R^3) \quad (2.13)$$

Остаётся обычное (естественное в задачах дифракции в неограниченном пространстве) требование подобия в первом приближении рассеянного поля уходящей сферической волне – условие Зоммерфельда (запись которого должна учитывать вид временного множителя в (2.4)):

$$E, H = O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (R \rightarrow \infty) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} E - ik_{\pm} E = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial}{\partial R} H - ik_{\pm} H = o\left(\frac{1}{R}\right) \quad (R \rightarrow \infty, x \in X_{\pm}) \quad (2.15)$$

(равномерно по  $R$ ) где

$$R = \sqrt{|x'|^2 + x_3^2}, \quad k_{\pm}^2 = \varepsilon_{\pm} \varepsilon_0 \mu_{\pm} \mu_0 \quad (2.16)$$

Имеет место единственность решения краевой задачи (2.5)-(2.7), (2.11)-(2.15) в классе дифференцируемых вектор-функций с локально квадратично суммируемыми частными производными. Её проверка основана на математической формализации принципа сохранения электромагнитной энергии, как это показано на аналогичных и близких задачах в [10-12,4,5].

### 3. Вывод гиперсингулярных интегральных уравнений задачи

Следствием (2.5)-(2.7) является, как известно, то, что компоненты векторов поля удовлетворяют уравнениям Гельмгольца при соответствующих значениях волнового числа  $k$  (у нас всегда равного  $k_{+}$  или  $k_{-}$ ):

$$-\Delta E_i = k_{\pm}^2 E_i, \quad -\Delta H_i = k_{\pm}^2 H_i \quad (i = 1..3, x \in X_{\pm}) \quad (3.1)$$

Метод параметрических представлений позволяет получить на основании этого систему уравнений, связывающую 2 из 6 компонент поля (остальные через них выражаются).

Далее будет использоваться интегральное преобразование Фурье в  $R^2$  обычных и обобщенных функций переменных  $(x', x_3)$  по переменной  $x'$ , параметризованное координатой  $x_3$ . В качестве Фурье образов у нас будут выступать функции аргумента  $\lambda'$ :

$$\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad (3.2)$$

которые будут иметь не более, чем полиномиальный рост (вместе со всеми своими производными). Таким образом, мы сможем оставаться в рамках пространства обобщенных функций медленного роста  $\mathfrak{F}'$  [10]. Для таких обобщенных функций, корректны, как известно, понятия дифференцирования, умножения (на локально суммируемую функцию медленного роста), локализации носителя (финитность). Поэтому для этих обобщенных функций допустимы обычные функциональные обозначения (разумеется, без «поточечной» интерпретации). Принятую здесь нормировку преобразования Фурье поясним его выражением на основных функциях:

$$F[u] = F[u](\lambda') = F[u(x')](\lambda') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(x') \cdot \exp(-i\lambda'x') dx' \quad (3.3)$$

При использовании прямого и обратного преобразований Фурье будут применяться обозначения:

$$\begin{aligned} F^{-1}[f] &= F^{-1}[f](x') = F^{-1}[f(\lambda')](x'), \\ F[g] &= F[g](\lambda') = F[g(x')](\lambda') \quad (f, g \in \mathfrak{F}') \end{aligned} \quad (3.4)$$

Принадлежность элементов  $f, g$  более узким функциональным классам будет при выкладках подразумеваться ясной из контекста. В окончательных результатах выражения вида  $F^{-1}[f](x')$  с локально суммируемой функцией  $f$  будут интерпретироваться конкретнее. В частности, для выяснения аналитических свойств Фурье преобразованной функции будем выяснять поведение  $f(\lambda')$  при  $\lambda' \rightarrow \infty$ . Напомним также, что преобразование Фурье элементов  $u = u(x')$ , обладающих центральной симметрией, сохраняет это свойство у образов, позволяя рассматривать, так называемое, преобразование Фурье-Бесселя  $G$  (иначе – преобразование Ганкеля нулевого порядка) [13-14]:

$$\begin{aligned} u(x') = u(|x'|) &\Rightarrow F[u](\lambda') = G[u(|x'|)](\lambda) \quad (\lambda = |\lambda'|), \\ f(\lambda') = f(|\lambda'|) = f(\lambda) &\Rightarrow F^{-1}[f(\lambda')](x') = G[f(\lambda)](|x'|) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Речь идёт об интегральном преобразовании с ядром вида

$$G(\xi, \lambda) = \lambda J_0(\xi\lambda),$$

Для упомянутых интерпретаций обобщенных функций полезна формула Зоммерфельда [11], которой в наших обозначениях можно придать такой вид:

$$G\left[\frac{\exp(-x_3\sqrt{\lambda^2 - k^2})}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\right](|x'|) = \frac{\exp\left(ik\sqrt{|x'|^2 + x_3^2}\right)}{\sqrt{|x'|^2 + x_3^2}} \quad (3.6)$$

Применение к равенствам (3.1) прямого преобразования Фурье по  $x' \in \mathbb{R}^2$  приводит к дифференциальным уравнениям гармонических колебаний

относительно  $x_3$ , куда  $\lambda'$  входит как параметр. Поэтому, если решение рассматриваемой краевой задачи (2.5)-(2.7), (2.11)-(2.15) существует, то

$$E = F^{-1} \left[ C^\pm(\lambda') \exp(\mp x_3 \gamma_\pm(\lambda)) \right] , \quad (3.7)$$

где, определяя, как обычно, квадратный корень из  $z = \rho \exp(i\varphi)$  равным  $\sqrt{z} = \sqrt{\rho} \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right)$ , мы обозначаем

$$\gamma_\pm = \sqrt{\lambda^2 - k_\pm^2} \quad (3.8)$$

Вытекающая из (2.11)-(2.12) всюду на  $\Pi$  (2.3) непрерывность тангенциальных компонент  $E_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) электрической составляющей поля позволяет (в силу однозначной обратимости преобразования Фурье в классе  $\mathfrak{T}'$ ) заключить, что

$$C^+_i(\lambda') = C^-_i(\lambda') = C_i(\lambda') \quad (i = 1, 2) \quad (3.9)$$

Аналогично, исходя из вытекающего из (2.7) выражения

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial E_1}{\partial x_1} - \frac{\partial E_2}{\partial x_2} ,$$

с учётом представления (3.7) и равенств (3.9), совершая предельные переходы по  $x_3 \rightarrow +0$  и  $x_3 \rightarrow -0$ , получим:

$$-\gamma_+ C^+_3 = -i(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = \gamma_- C^-_3 \quad (3.10)$$

Полагая тогда

$$C_3 = \sqrt{\frac{\gamma_+}{\gamma_-}} C^+_3 ,$$

получим, что

$$C^\pm_3 = \pm \sqrt{\frac{\gamma_\mp}{\gamma_\pm}} C_3 , \quad C_3 = i \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{\sqrt{\gamma_+ \gamma_-}} \quad (3.11)(3.12)$$

Для вывода системы уравнений обратимся к тем из граничных условий (2.11) на  $\Pi \setminus \Sigma$ , которое ещё не было использовано. С учётом (2.5) это даёт:

$$\begin{aligned} 0 &= [H_1]_{-0}^{+0} = -\frac{i}{\omega\mu_0} \left[ -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) \right]_{-0}^{+0} , \\ 0 &= [H_2]_{-0}^{+0} = -\frac{i}{\omega\mu_0} \left[ -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} E_3 \right) \right]_{-0}^{+0} \quad (x' \notin \sigma) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь скачок подразумевается при фиксированном  $x'$  по  $x_3$ , и для удобства записи введена функция

$$\mu(x_3) = \begin{cases} \mu_+ & \Leftarrow x_3 > 0 \\ \mu_- & \Leftarrow x_3 < 0 \end{cases}$$

Подставим в (3.13) выражение  $E_i$  через  $C_i$  (3.7, 9, 11) и, подразумевая, что далее  $C_3$  будет согласно (3.12) выражено через  $C_1, C_2$ , получим:

$$\begin{aligned} F^{-1} \left[ i\lambda_2 \left( \frac{1}{\mu_+} \sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_+}} + \frac{1}{\mu_-} \sqrt{\frac{\gamma_+}{\gamma_-}} \right) C_3 - \left( -\frac{\gamma_+}{\mu_+} - \frac{\gamma_-}{\mu_-} \right) C_2 \right] &= F^{-1}[f_2] = 0, \\ F^{-1} \left[ i\lambda_1 \left( \frac{1}{\mu_+} \sqrt{\frac{\gamma_-}{\gamma_+}} + \frac{1}{\mu_-} \sqrt{\frac{\gamma_+}{\gamma_-}} \right) C_3 + \left( +\frac{\gamma_+}{\mu_+} + \frac{\gamma_-}{\mu_-} \right) C_1 \right] &= F^{-1}[f_1] = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

( $x' \notin \sigma$ )

(заодно вводя обозначения  $f_1, f_2$ ). Эти формулы свидетельствуют о финитности Фурье прообразов функций  $f_1, f_2$ . Следовательно,

$$u_i(x') = F^{-1} \left[ \frac{\mu_- + \mu_+}{\mu_- \mu_+} f_i(\lambda') \right] \Rightarrow \text{supp } u_i \subseteq \sigma \quad (i = 1, 2) \quad (3.15)$$

где постоянный множитель при  $f_i$  взят для упрощения дальнейших формул.

**Теорема 3.1.** Предельные значения на  $\Pi$  (2.2) тангенциальных компонент электрической составляющей рассеянного поля допускают (в предположении существования решения задачи (2.5)-(2.7), (2.11)-(2.15)) представление в форме сумм результатов действия псевдодифференциальных операторов  $G_{i,j}$  на финитные (возможно, обобщенные) функции, сосредоточенные на  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} E_i(x', 0) &= G_{i,1}[u_1](x') + G_{i,2}[u_2](x') \quad (i = 1, 2, \text{supp } u_i \subseteq \sigma), \\ G_{i,j}[u](x') &= F^{-1}[g_{i,j}(\lambda') \cdot F[u](\lambda')](x') \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned}$$

где символы  $g_{i,j}(\lambda')$  псевдодифференциальных операторов имеют явные выражения. Из их, в частности, вытекает, что обобщенные ядра операторов  $G_{i,j}$  слагаются из одной (при  $i \neq j$ ) или двух частей так, что обязательная часть

представляет собой обобщённую производную  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$  суммы ядер потенциалов

простого слоя оператора Гельмгольца (при  $k = k_+, k_-$ ) и регулярной функции. Дополнительная (только при  $i = j$ ) часть является суммой самих таких ядер потенциалов простого слоя и другой регулярной функции. Регулярные функции обладают первыми частными производными, которые непрерывны по Гёльдеру.

Мы пользуемся тем, что для обобщенной функции  $f \in \mathfrak{S}'$  и финитной  $g \in D'$  свёртка  $f * g$  заведомо возможна, а её преобразованием Фурье служит произведение Фурье образов (и обратно) [13]. Хорошо известно также, что, если

данные обобщенные функции регулярны, и  $f$  отождествляется с локально суммируемой функцией, а  $g$  - с финитной и непрерывной (с носителем  $K$ ), то

$$(f * g)(x') = \int_K f(x' - y') \cdot g(y') dy'$$

**Следствие 3.1.** Указанная в теореме пара финитных функций удовлетворяет системе свёрточных уравнений

$$\begin{aligned} G_{1,1} * u_1 + G_{1,2} * u_2 &= -E^0_1(x', 0), \\ G_{2,1} * u_1 + G_{2,2} * u_2 &= E^0_2(x', 0) \quad (x' \in \sigma) \end{aligned} \quad (3.16)$$

которая может считаться гиперсингулярной в том смысле, что главные части ядер получаются применением вторых частных производных к сужению на  $\Pi$  (2.2) фундаментальных решений оператора Гельмгольца в  $R^3$  (см. формулировку теоремы).

Поскольку фундаментальное решение оператора Гельмгольца в  $R^3$  (рассматриваемое при  $x_3 = 0$ ) имеет особенность порядка  $|x'|^{-1}$ , то применение вторых частных производных приводит к неинтегрируемым в  $R^2$  («гиперсингулярным») особенностям порядка  $|x'|^{-3}$ . Поэтому свёртки в (3.16) могут, как это хорошо известно, выражаться интегральной операцией только при понимании интегралов в смысле Адамара. Отметим также, что выделение главной части двумерных свёрток в форме ядер потенциалов для 3-мерного оператора Гельмгольца допускает произвол в выборе значений волновых чисел для этих потенциалов. Имеет смысл брать нулевое значение (как это сделано в [7]) или  $k = k_-, k_+$ , как в настоящей работе.

**Замечание 3.1.** В простейшем у нас частном случае, когда среды в полупространствах  $X_+, X_-$  одинаковы, система гиперсингулярных уравнений, решение которой позволяет строить рассеянное поле, может быть взята из работы [1], если применить её результаты к частному для неё случаю плоских экранов.

**Доказательство теоремы 3.1.**

Удобно ввести сокращенные обозначения для средних величин, взвешенных магнитными проницаемостями:

$$(a, b)_\mu = \frac{\mu_-}{\mu_- + \mu_+} \cdot a + \frac{\mu_+}{\mu_- + \mu_+} \cdot b = \alpha \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b \quad (3.17)$$

Формулы (3.14) после подстановки туда (3.12) и приведения подобных (с учётом (3.17)), примут вид линейной системы относительно  $C_1(\lambda'), C_2(\lambda')$ :

$$\begin{aligned} ((\gamma_+, \gamma_-)_\mu - \lambda_1^2(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu) \cdot C_1 - \lambda_1 \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu C_2 &= F[u_1] \\ -\lambda_1 \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \cdot C_1 - ((\gamma_+, \gamma_-)_\mu + \lambda_2^2(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu) C_2 &= F[u_2] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$



Покажем, что модуль функционального дискриминанта  $D = D(\lambda') = D(\lambda)$  этой системы ограничен от нуля. Ему легко придать вид:

$$\begin{aligned} D &= (\gamma_+, \gamma_-)_\mu^2 - \lambda^2 (\gamma_+, \gamma_-)_\mu (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu = \\ &= -q^2 - \alpha(1-\alpha) \cdot (\lambda^2(k_+^2 + k_-^2) - 2k_+^2 k_-^2) \cdot \gamma_+^{-1} \gamma_-^{-1} = \\ &= -q^2 - \alpha(1-\alpha) \cdot \varphi(\lambda) \quad (q^2 = -\alpha^2 k_+^2 - (1-\alpha)k_-^2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Очевидно, что

$$D = -q^2 \iff k_+^2 = k_-^2 = k^2 \quad (\text{в частности, при } \varepsilon_+ = \varepsilon_-, \mu_+ = \mu_-)$$

Иначе, если  $k_+^2 \neq k_-^2$ , то, как мы убедимся,

$$\operatorname{Re} D \leq -q^2 \neq 0 \quad (\lambda \in R) \quad (3.21)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} k_{\min}^2 \leq \lambda^2 \leq k_{\max}^2 &\Rightarrow \operatorname{Re} \varphi(\lambda) = 0 \rightarrow \operatorname{Re} D = -q^2 \\ 0 < \lambda^2 < k_{\min}^2 &\Rightarrow \operatorname{Re} D = D, \quad \varphi(\lambda) = \frac{2k_+^2 k_-^2 - \lambda^2(k_+^2 + k_-^2)}{\sqrt{(k_+^2 - \lambda^2)(k_-^2 - \lambda^2)}} > \\ &\frac{2k_{\min}^2 k_{\max}^2 - k_{\min}^2(k_{\min}^2 + k_{\max}^2)}{\sqrt{(k_+^2 - \lambda^2)(k_-^2 - \lambda^2)}} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} D < -q^2 \\ k_{\max}^2 < \lambda^2 &\Rightarrow \operatorname{Re} D = D, \quad \varphi(\lambda) = \frac{\lambda^2(k_+^2 + k_-^2) - 2k_+^2 k_-^2}{\sqrt{(\lambda^2 - k_+^2)(\lambda^2 - k_-^2)}} > \\ &\lambda^2 \frac{(k_{\min}^2 + k_{\max}^2) - 2k_{\min}^2}{\sqrt{(\lambda^2 - k_+^2)(\lambda^2 - k_-^2)}} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} D < -q^2 \end{aligned}$$

Таким образом, (3.19) разрешимо относительно вектора значений  $C_i(\lambda')$ :

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (\gamma_+, \gamma_-)_\mu - \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu & \lambda_1 \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \\ \lambda_1 \lambda_2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu & (\gamma_+, \gamma_-)_\mu - \lambda_1 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F[u_1] \\ F[u_2] \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

В силу (3.7) и (3.9) преобразования Фурье функций  $C_i(\lambda')$  ( $i=1,2$ ) представляют собой предельные значения первых двух компонент электрической составляющей рассеянного поля. Поэтому (3.22) определяет вид упоминаемых в формулировке теоремы  $g_{i,j}(\lambda')$  (символов псевдодифференциальных операторов  $G_{i,j}$ ). Эти функции, очевидно, аналитичны в  $R^2$  вне окружностей  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = k_\pm^2$ . Поведение  $g_{i,j}(\lambda')$  в окрестностях точек  $\lambda'$  указанных окружностей определяется поведением выражений вида

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma_+, \gamma_-)_\mu}{D(\nu)} &\sim \gamma_\pm^2 = O(|\nu' - \lambda'|) \quad (\nu' \rightarrow \lambda''), \\ \frac{\nu_i \nu_j (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu}{D(\nu)} &= -\frac{\lambda_i \lambda_j \beta_\pm \gamma_\pm(\lambda)}{2\alpha(1-\alpha)(\lambda^2 \bar{k}^2 - \tilde{k}^4)} + O(|\nu' - \lambda'|) \quad (\nu' \rightarrow \lambda''), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$\beta_+ = \alpha, \quad \beta_- = 1 - \alpha, \quad \bar{k}^2 = \frac{k_+^2 + k_-^2}{2}, \quad \tilde{k}^4 = \sqrt{k_+^2 k_-^2} \quad (3.24)$$

Следовательно, функции  $g_{i,j}(\lambda')$  непрерывны всюду в  $R^2$ . Но мы вычленим из них главные части явного вида, медленно убывающие при  $\lambda \rightarrow \infty$  так, чтобы остатки убывали быстро и могли быть Фурье образами регулярных функций. При этом приходится учитывать то, что главные части будут иметь особенности (и, в виду непрерывности внесут такие же особенности в остатки, несколько изменяя аналитические свойства их прообразов). В осуществление этой программы запишем функциональный дискриминант в виде

$$D(\lambda) = -q_1^2(1 + \psi(\lambda)) \quad \left( q_1^2 = q^2 + 2\alpha(1-\alpha) \cdot \bar{k}^2 \right),$$

$$D^{-1} = -q_1^{-2} \left( 1 + \frac{\psi}{1-\psi} \right) = -q_1^{-2} (1 + \xi(\lambda)), \quad (3.25)$$

где, очевидно, при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем

$$\psi(\lambda), \xi(\lambda) = O(\lambda^{-2}),$$

Поэтому структура символов  $g_{i,j}(\lambda')$  такова:

$$h_{i,j} = \lambda_i \lambda_j \frac{(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu}{D} = -\lambda_i \lambda_j \left( \frac{(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu + (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \cdot \xi(\lambda)}{q_1^2} \right) \quad (= g_{i,j} \Leftarrow i \neq j) \quad (3.26),$$

$$\begin{aligned} g_{i,i} &= \frac{(\gamma_+, \gamma_-)_\mu}{D} - h_{j,j} = \lambda^2 \frac{(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu}{D} - \frac{(k_+^2 \gamma_-^{-1}, k_-^2 \gamma_-^{-1})_\mu}{D} - h_{j,j} = \\ &= \lambda_i^2 \frac{(\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu}{D} - \frac{(k_+^2 \gamma_-^{-1}, k_-^2 \gamma_-^{-1})_\mu}{D} = -q_1^{-2} \times \\ &= (\lambda_i^2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu - (k_+^2 \gamma_-^{-1}, k_-^2 \gamma_-^{-1})_\mu + \lambda_i^2 (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \cdot \xi(\lambda) + \eta(\lambda)) \quad (j = 3 - i) \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$\zeta(\lambda) = (\gamma_+^{-1}, \gamma_-^{-1})_\mu \cdot \xi(\lambda), \quad \eta(\lambda) = O(\lambda^{-3}) \quad (3.28)$$

при этом функции  $\zeta(\lambda), \eta(\lambda)$  (которые определяют «остатки») имеют в силу вида выделенных главных частей интегрируемые особенности порядка

$(\lambda - k_{\pm})^{-1/2}$  на окружностях  $\lambda = |\lambda'| = k_{\pm}$ . Поэтому каждую из этих функций можно представить в виде суммы некой финитной функции с указанными особенностями  $f_1 \in L_2(R^2)$  и непрерывной функции  $f_2 \in L_1(R^2)$ , причём  $\lambda_1^m \lambda_2^n f_1 \in L_2$  при всех, а  $\lambda_1^m \lambda_2^n f_2 \in L_2$  при тех  $m, n$ , что  $m + n < 2$ . Другими словами, интересующие нас  $\zeta(\lambda), \eta(\lambda)$  имеют Фурье прообразы, которые локально квадратично интегрируемы, причём, по крайней мере, вместе со своими частными производными первого порядка.

### Доказательство следствия 3.1

Уравнения (3.16) следуют из краевых условий (2.12) и установленного теоремой представления граничных значений тангенциальных компонент электрического поля через две финитные функции, которые теперь трактуются как искомые.

### 4. Конечномерное моделирование методом замкнутых дискретных рамок

Об аналитическом решении (3.16) говорить не приходится, так же, как и о точном решении бесконечномерной линейной системы, к которой эту систему ГСИУ можно, так или иначе, свести. Поэтому актуальным является построение методов приближенного решения полученной гиперсингулярной системы. На сегодня реализуемым подходом является сопоставление исходной системе уравнений в свёртках её конечномерного аналога, причём определенным, отработанным на модельных задачах («каноническим») способом. Один из наиболее известных «канонических» приёмов – метод конечных элементов или (при решении интегральных уравнений на границе области) – метод граничных элементов. Они используют принцип галёркинских приближений. Если этот принцип применяется к уравнениям с гиперсингулярными ядрами в сочетании с коллокационным подходом, то такой метод следует отнести к классу методов дискретных особенностей. Он требует вычисления гиперсингулярных интегралов, включающих базисные функции. Если базисные функции постоянны на своём носителе, то такой «интеграл» выражают через обычные интегралы, включая контурные – «по рамкам» [6], так, что в случае задач гидродинамики ( $k = 0$ ) получается тот же результат, что и при использовании для дискретизации физических соображений о формировании произвольных течений системами малых замкнутых вихрей [6].

Метод замкнутых дискретных рамок выбран нами по трём причинам. Во-первых, отличительной чертой таких методов является возможность получить устойчивую в отношении численных методов (типа Гаусса или Зейделя) СЛАУ, не закладывая в базисные функции точной информации о свойствах искомого решения, таких как поведение на границе. Во вторых, для подходов МДО в разнообразных плоских задачах дифракции имеется достаточно полная математическая теория [16]. В третьих, для ГСИУ трехмерной дифракции на экранах, но в однородном пространстве, корректность метода замкнутых дискретных рамок тоже обоснована [6].

Определим, что приближение к решению уравнения в свёртках (3.16) будет нами разыскиваться в классе регулярных функций вида

$$u_i(x') = \sum_{\alpha} u_{i,\alpha} \cdot I_{\alpha}(x') \quad (i=1,2), \quad (4.1)$$

где базисные функции  $I_{\alpha}$ , в свою очередь, имеют вид

$$I(x') = h(x') \cdot \chi_C(x') \quad (h \in C^2(\mathbb{R}^2), C \subset \mathbb{R}^2) \quad (4.2)$$

где  $C$  - ограниченная область (какая-то из ячеек некоторого разбиения области  $\sigma$ ),  $\chi_C$  - её характеристическая функция. Тогда свёртки в (3.16), не подпадающие под классическое определение, будем понимать как регулярные функции соответственно естественному определению

$$(g * I_C)(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} F^{-1}[F[g] \cdot F[I_{C,\delta}^{\varepsilon}]](x') \quad (4.3)$$

где  $I_C(x')$  - функция с носителем  $C$  (4.2),  $I_C^{\varepsilon}(x')$  - такая же, но её носитель - объединение  $C(\varepsilon)$  всех  $\varepsilon$ -кругов с центрами в точках из  $C$ , а  $I_{C,\delta}^{\varepsilon}(x')$  - регуляризация последней функции с помощью бесконечно гладкой  $\delta$ -шапочки [13, с.50]. Теперь хорошо известными в теории обобщенных функций приёмами можно убедиться в справедливости нужной нам формулы типа Грина.

**Лемма 4.1.** Пусть ограниченная область  $C$  имеет кусочно аналитическую границу.

**1<sup>0</sup>.** Пусть функция  $f(\lambda')$  - локально интегрируемая медленного роста, а её Фурье прообраз - тоже локально интегрируемая регулярная функция, которая имеет непрерывные частные производные второго порядка, по крайней мере, вне нуля. Тогда свёртка с функцией  $I = I_C$  вида (4.2) допускает представление

$$\begin{aligned} (-F^{-1}[\lambda_i \lambda_j f] * I_C)(z') &= \oint_{\partial C} (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot h(x') dx_{3-i} + \\ &(-1)^{j-1} \oint_{\partial C} F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} h dx_{3-j} + \iint_C F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} h dx_1 dx_2 \\ &(z' \notin \partial C). \end{aligned} \quad (4.4)$$

**2<sup>0</sup>.** Утверждение сохраняет силу, если функции двух переменных:  $f(\lambda')$  - непрерывно дифференцируема, а  $h(x')$  из (4.2) - линейна.

$$\begin{aligned} (-F^{-1}[\lambda_i \lambda_j f] * I_C)(z') &= \oint_{\partial C} (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot h(x') dx_{3-i} + \\ &(-1)^{j-1} \oint_{\partial C} F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} h dx_{3-j} \quad (h = Ax_1 + Bx_2, z' \notin \partial C) \end{aligned} \quad (4.5)$$

**Доказательство леммы 4.1.** Пусть, например,  $i \neq j$ , а  $x' \in C$ . Зафиксируем  $z'$  и рассмотрим

$$\begin{aligned}
& -F^{-1}[\lambda_1 \lambda_2 f] * I_{C,\delta}^\varepsilon = -F^{-1}\left[f \cdot \lambda_1 \lambda_2 F\left[I_{C,\varepsilon}^\varepsilon\right]\right] = \\
& \iint_C F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial^2 I_{C,\delta}^\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \iint_{C(\varepsilon)C} F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial^2 I_{C,\delta}^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} dx_1 dx_j = \\
& \iint_C F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial^2 I_C}{\partial x_i \partial x_j} dx_1 dx_j + \\
& \oint_{\partial C} \frac{\partial}{\partial x_2} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot I_{C,\delta}^\varepsilon dx_2 + F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial I_{C,\delta}^\varepsilon}{\partial x_1} dx_1 + \\
& \iint_{C(\varepsilon)C} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot I_{C,\delta}^\varepsilon dx_1 dx_j = J_1[f] + J_{2,\delta}^\varepsilon[f] + J_{3,\delta}^\varepsilon[f]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Поскольку регуляризации локально интегрируемой функции при  $\delta \rightarrow 0$  сходятся к этой функции, причём по метрике  $L_1$  [ , теорема II], а интеграл от локально интегрируемой функции по ограниченной области непрерывно зависит от области, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} J_{3,\delta}^\varepsilon[f] = 0 \tag{4.7}$$

Контурный интеграл  $J_{2,\delta}^\varepsilon$  (по «рамке», охватывающей особенность) при  $\delta < \varepsilon$  от  $\delta$  не зависит. Более того, тогда он не зависит и от  $\varepsilon$  и вполне определяется на  $\partial C$  предельными значениями подынтегрального выражения изнутри  $C$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} J_{2,\delta}^\varepsilon = \oint_{\partial C} \frac{\partial}{\partial x_2} (F^{-1}[f](z' - x')) \cdot h dx_2 - F^{-1}[f](z' - x') \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} dx_1, \tag{4.8}$$

Из (4.6)-(4.8) вытекает (4.4). Другие случаи ( $i = j$ ,  $x' \notin \bar{C}$ ) рассматриваются аналогично, что и завершает доказательство первого пункта. Для проверки  $2^0$  применим (4.4) к линейной  $h(x')$  и регуляризации  $F^{-1}[f]_\delta(x')$  функции  $F^{-1}[f]$  с помощью бесконечно гладкой  $\delta$ -шапочки. Последний член правой части обнулится, и для получения (4.5) остаётся перейти к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ . Используется то, что регуляризация непрерывной функции сходится к этой функции равномерно на компактах, а непрерывные производные рассматриваемых регуляризаций суть регуляризации производных регуляризируемой функции.

Результат леммы позволяет распространять формулы обобщенного метода замкнутых вихревых рамок (аналогичные [6], формула (12.3.7)) на случаи более сложных гиперсингулярных ядер и базисных функций различной формы.

## 5. Алгоритм приближенного вычисления рассеянного поля

Методы вычисления характеристик дифракционного процесса, должны, так или иначе, использовать средства расчёта рассеянного поля в заданной точке пространства. Некоторые характеристики вычисляются через явно рассчитанные значения напряженностей (или потенциалов) в различных точках, другие – посредством анализа (обычно – асимптотического) выражений, вытекающих из

формул для таких расчетов. Изложим алгоритмическую схему приближенного расчёта напряженностей электрического и магнитного полей в рассматриваемой задаче.

**Шаг 1.** Дискретизация области  $\sigma$ . Рассмотрим сперва квадратную сетку в  $R^2$ , шаг которой  $h$  выбирается из соображений компромисса между его практической малостью по сравнению с длиной падающей волны  $\lambda$  и показателем сложности вычислений  $Compl(h)$ . (Выбор этого показателя не однозначен в принципе [19] и еще зависит от используемых вспомогательных численных методов, характера и объёма предполагаемых вычисленных экспериментов. Можно ориентироваться на простейшие оценки сложности по памяти  $Compl(h) = c \cdot h^4$  и по времени  $Compl(h) = c \cdot h^6$ , имеющие в виду решение возникающих СЛАУ по методу Гаусса.) Заменить далее исходную область  $\sigma$  на ступенчатую область  $\sigma_N$ , составленную из тех  $N$  ячеек сетки, большая часть которых (скажем, в смысле площади) пересекается с  $\sigma$ .

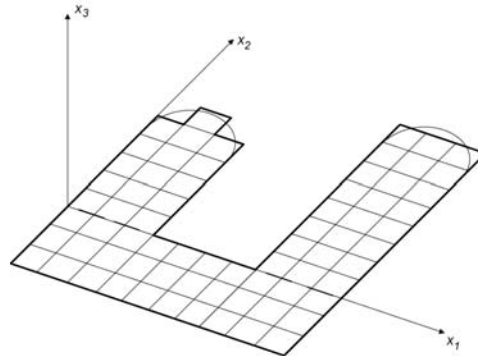


Рис.2. Иллюстрация шага дискретизации области  $\sigma$ .

Замечание к шагу 1. Учитывая малость  $h$  по сравнению с  $\lambda$  и невысокий порядок аппроксимации метода внутри области (см. следующий шаг) степень заботы о близости  $\partial\sigma_N$  к  $\partial\sigma$  не обязательно должна быть максимальной, но определяться конкретными требованиями прикладной задачи. Повышать эту близость можно за счет сдвига и плавных деформаций исходной сетки. Некоторым обоснованием этого служит опыт численного решения ГСИУ на неквадратных сетках для плоских экранов (см., например, сообщения, сделанные в [6,8,17]).

**Шаг 2-1.** Обеспечить вычисление для задаваемых точек значений преобразования Фурье функций  $\lambda, \zeta(\lambda), \eta(\lambda)$ .

**Шаг 2-2.** Заменить исходную гиперсингулярную систему её дискретным аналогом, используя базисные функции  $I_k$ , сосредоточенные и постоянные на элементах  $\sigma(k)$  ступенчатой области  $\sigma_N$  ( $k = 1..N$ ):

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^N G_{i,j,k,l} \cdot u_{j,l} = (-1)^i q_1^2 E_i(x'_k, 0) \quad (i = 1,2; k = 1..N), \quad (5.1)$$

где  $x'_k$  суть геометрические центры ячеек  $\sigma(k)$ , составляющих ступенчатую область  $\sigma_N$ ,

$$u_i(x') \mapsto [u_{i,k}]_{k=1}^2, \quad (x' \in \sigma(k) \Rightarrow u_i(x') = u_{i,k}), \quad (5.2)$$

$$G_{i,j,k,l} =$$

$$(-1)^{i-1} \oint_{\partial\sigma(l)} \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ \frac{(\exp(ik_+|x'_k - x'|), \exp(ik_-|x'_k - x'|))_\mu}{|x'_k - x'|} + F^{-1}[\zeta](x'_k - x') \right\} dx_{3-j} +$$

$$\delta_{i,j} \iint_{\sigma(l)} \left\{ - \frac{(k_+ \exp(ik_+|x'_k - x'|), k_- \exp(ik_-|x'_k - x'|))_\mu}{|x'_k - x'|} + G[\eta](|x'_k - x'|) \right\} dx_1 dx_2$$

$$(i = 1, 2; k = 1..N) \quad (5.3)$$

Эти формулы основаны на применении леммы 3.1. Она позволяет также использовать при необходимости кусочно линейные базисными функции.

**Шаг 3.** Решить СЛАУ (4.9) методом Гаусса (стандартно используемым в реализациях МДО [6]) обязательно с контролем обусловленности. Для прямоугольных экранов, как можно убедиться на примерах, матрица этой системы имеет характер блочного диагонального преобладания. А это, как показывает опыт применения алгоритмов МДО в дифракционных, но более простых задачах [6,8,17], даёт основание рассчитывать на сохранение численной устойчивости метода Гаусса по отношению к системе (5.1) также и для экранов, не имеющих какой-либо симметричной формы.

**Шаг 4.** Получить апостериорную оценку качественной точности приближенного решения гиперсингулярной системы. Например, контролировать правдоподобность получаемых на их основе рассеянных полей 3-мерной задачи путём их сравнения с также основанными на ГСИУ решениями близких, но более простых задач - двумерных с учётом диэлектрической подложки [18] или трехмерных но с однородным диэлектрическим окружением экрана [8]. (Требовать обязательной количественной оценки точности за счёт измельчения сетки не представляется в данных задачах реальным в виду малости порядка сходимости и ограниченности вычислительного ресурса, основанного на персональных компьютерах.)

**Шаг 5.** Вычислить значение напряженности электрической составляющей поля в заданной точке в соответствии со связью между искомым векторным полем и решением системы (3.16), вытекающей из (3.7)-(3.10) и (3.22) (в обозначениях теоремы 3.1):

$$i = 1, 2 \Rightarrow E_i(x) = \sum_{j=1}^2 \left\{ F^{-1} [g_{i,j} \cdot \exp(\mp x_3 \cdot \gamma_\pm)] * u_j \right\}(x'), \quad (5.4)$$

$$E_3(x) = \pm \sum_{j=1}^2 \left\{ F^{-1} \left[ \sum_{i=1}^2 i \lambda_i g_{i,j} \cdot \exp(\mp x_3 \gamma_\pm) \right] * u_j \right\}(x') \quad \left( x' \in R^2, \begin{matrix} x_3 > 0 \\ x_3 < 0 \end{matrix} \right) \quad (5.5)$$

Подразумевается, что вычисление использует не точное решение  $(u_1(x'), u_2(x'))$  системы (3.16), а приближенное, составленное из функций  $u = u_i$  вида (4.1)-(4.2), полученное на шаге 3.

Замечание к шагу 5. Из (5.4)-(5.5) вытекает вид таких символов  $\tilde{g}_{i,j}(\lambda', x_3)$  для псевдодифференциальных операторов с бесконечно гладкими ядрами  $G_{i,j}$ , действующих на функции переменной  $x'$  ( $x_3$  - параметр), что

$$E_k = \sum_j \tilde{G}_{k,j}(x', x_3) * u_j(x') \quad (k = 1..3, x_3 \neq 0), \quad (5.6)$$

где \* понимается в смысле классической свёртки по переменной  $x'$ .

**Шаг 6.** Вычислить значение напряженности магнитной составляющей поля в заданной точке в соответствии с (2.6) и (5.4)-(5.5). Точнее: если обозначить

$$\langle k+ \rangle = k + 1 \pmod{3}, \quad \langle k++ \rangle = k + 2 \pmod{3}, \quad (5.7)$$

то при  $k = 1..3, x_3 \neq 0$  будем иметь

$$H_k = -\frac{i}{\mu_{\pm} \mu_0 \omega} \times \sum_j \iint_{\sigma(N)} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\langle k+ \rangle}} \tilde{G}_{\langle k+ \rangle, j}(x' - y', x_3) - \frac{\partial}{\partial x_{\langle k++ \rangle}} \tilde{G}_{\langle k++ \rangle, j}(x' - y', x_3) \right) \cdot u_j(y') dy' \quad (5.8)$$

где под  $u_j$  подразумеваются, как и выше, приближения вида (4.1)-(4.2).

### 6. Заключение

В численном исследовании процессов рассеяния электромагнитных волн плоскими металлическими экранами реальных радиотехнических устройств следует принимать во внимание наличие диэлектрических подложек, на которых эти экраны обыкновенно крепятся. Рассмотренная постановка задачи определённым образом учитывает это обстоятельство. При этом принимаемые ради упрощения задачи идеализирующие предположения позволили остаться в рамках класса плоско параллельных структур и применить в рассматриваемой задаче метод параметрических представлений интегральных и псевдодифференциальных операторов.

Этим удалось в значительной степени обойти сложность вывода эквивалентных интегральных уравнений на экране, которыми целесообразно заменить исходную постановку для системы уравнений Максвелла в диэлектрически кусочно неоднородном окружающем экран пространстве. Точнее, нами построена система уравнений в свёртках (с гиперсингулярными ядрами) относительно неких неизвестных функций точки экрана. Выбор этих неизвестных функций (взамен предельных значений двух компонент электрического поля) осуществляется не эвристически, но указание на него получается в процессе реализации метода параметрических интегральных представлений псевдодифференциальных операторов.

Ядра полученных уравнений в свёртках, как нами доказано, выражаются в основном через вторые производные (в смысле обобщенных функций) локально



суммируемых и вне нуля непрерывных функций, причём особенности в нуле такие, как у фундаментальных решений уравнений Гельмгольца. Поэтому поиск приближенных решений в классе кусочно-постоянных функций приводит к такой дискретной модели данной системы, которая соответствует методу замкнутых дискретных рамок, т.е. обобщенному методу замкнутых дискретных вихревых рамок [6]. Ввиду того, что такая система пока находится вне имеющейся теории сверхсингулярных интегральных уравнений, нами рассмотрены её идейные связи с построениями математической теории методов дискретных особенностей. В этом состоит неформальное обоснование выбора модели дискретизации именно из данного класса.

Несмотря на громоздкость формул, переводящую задачи дифракции на экранах в диэлектрически неоднородных средах в качественно более сложный класс, нами строится схема расчётного алгоритма, позволяющего производить численный расчёт рассеянных полей и, тем самым, их характеристик (включая диаграммы направленности).

Теоретическое значение данной работы состоит в том, что она развивает метод параметрических представлений интегральных и псевдодифференциальных операторов в классах обобщённых функций для нового класса математических задач электродинамики в сочетании с алгоритмической подготовкой последующей численной реализации МДО. А прикладное значение – в том, что её результаты открывают дорогу для вычислительных экспериментов на основе новой матфизической и дискретной моделей дифракции на идеально проводящих экранах с имитацией эффекта диэлектрической подложки.

Дальнейшие исследования, которые продолжали бы направление данной работы, прежде всего, требуют надёжной программной реализации построенной здесь схемы базового алгоритма и могут состоять в планировании и проведении систематических вычислительных экспериментов для выяснения прикладных возможностей таких алгоритмов. Представляет также безусловный интерес развитие и углублённое исследование математическими методами свойств разработанной в данной работе модели дифракции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // ДАН СССР, 1984, - т.286, вып. 1., С. 96-100.
2. Anfinogenov A.Yu., Lifanov I.I. On numerical solution of integral equations of planar and spatial diffraction problems. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. – 1992. – Vol. 7, N 5, P. 387-404.
3. Щербина В.А. Граничные уравнения для квазистационарной задачи дифракции электромагнитного поля в  $R^3$  на идеально проводящем разрезе // Труды VII Международного симпозиума МДОЗМФ. – Феодосия, 1997. – С.234-235.
4. Смагин С.И. О численном решении задач дифракции в интегральных постановках // Труды Международной конференции по вычислительной

- математике МКВМ-2004. Ч. II. – Новосибирск. – Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2005. – С. 653-659.
5. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Об использовании гиперсингулярных интегральных уравнений для численного анализа задач дифракции электромагнитных волн на магнитодиэлектрических телах // Труды XII Международного симпозиума МДОЗМФ-2005. - Харьков-Херсон, 2005. - С 114-117.
  6. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – М.: Янус-К.– 2001.– 508 с.
  7. Гандель Ю.В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ-2003.-Харьков-Херсон,2003.- С.53-58
  8. Антоненко А. В., Гандель Ю. В. Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2003. – № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 9-14.
  9. Антоненко А.В. Математическая модель на базе МДО многоэлементной полосковой антенны на экранированной диэлектрической подложке // Вестник Харк. нац. ун-та. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления". вып. 5. - № 703, 2005. - С. 25-35.
  10. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: Мир, 1987, 311 с.
  11. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н. Лекции по математической физике.- М: Изд-во МГУ, 1993.- 352 с.
  12. Кошляков Н.С., Глиннер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики.- М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
  13. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука. –1979, 320 с.
  14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
  15. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
  16. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учеб. пособие, Ч.1, Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.- Харьков-Херсон: изд. ХНУ, 2001.- 92 с.
  17. Гахов А. В., Мищенко В.О. Трехмерная модель метода дискретных особенностей рассеяния скалярных волн экраном на границе раздела сред // Вестник ХНТУ.-2006.-№2(25)С.135-140.
  18. Луговой А.В., Сологуб В.Г. Рассеяние электромагнитных волн идеально проводящей лентой, лежащей на границе диэлектрического полупространства. – Препринт ИРЭ АН УССР №28. - Харьков, 1973. – 44 с.
  19. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М. – 1979. -536 с.