

Эффективность вычислений МДО в скалярной задаче 3-мерной дифракции на экране, лежащем в плоскости раздела сред

А. В. Гахов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

This paper investigated the new numerical method. This one obtained by the application of the generated discrete closed wind frames method to the hypersingular integral equation of this problem. Using method of planned computing experiment, we showed the adequacy of the developing algorithm and the realizing program. We estimated that reinforcement of the model which is connected with the physical difference of media upper and lower of the screen. We estimated the time complexity of calculations too.

1. Численные методы типа дискретных особенностей в пространственных задачах дифракции, истоки данной работы

Методы дискретных особенностей как численные методы, математически эквивалентные решению сингулярных или гиперсингулярных интегральных уравнений или систем, берут начало от метода дискретных вихрей С.М. Белоцерковского в аэрогидродинамике [1]. В дальнейшем, как известно, класс этих методов существенно расширился и включил в себя, в частности, новые подходы к решению двумерных и трёхмерных задач математической теории дифракции [2-11]. Настоящая работа опирается на следующие методы из указанной области. Это метод параметрических интегральных представлений псевдодифференциальных уравнений для плоскопараллельных задач дифракции [10] и численный обобщенный метод дискретных замкнутых вихревых рамок [6,9] применительно к гиперсингулярным интегральным уравнениям (ГСИУ) с неким ядром, главная часть которого есть нормальная производная потенциала двойного слоя.

Вместе с этим данная работа использует вычислительный эксперимент для исследования эффективности алгоритма, схема которого предложена в [12] для решения пространственной задачи дифракции плоских волн на жестком экране, расположенном в плоскости раздела двух различных сред. Обоснование такого экспериментального исследования дифракционных задач, имеющих усложнённую приближённую к реальности постановку, опирается, согласно концепции [7], на соотнесение полученных численных результатов с какими-то подобными результатами, ранее обоснованными в модельных случаях.

Отметим, что в скалярных, а также векторных задачах дифракции на экранах в 3-х мерном пространстве наряду с построением ГСИУ и численных алгоритмов их решения, накоплен большой опыт проведения компьютерных экспериментов испытательного характера по пространственной дифракции методами дискретных особенностей на экранах [2,5,9,11,13-16].

В работах [3-6] пространство вне рассеивающих экранов предполагается однородным, что в ряде случаев упрощает постановку задач, делая их модельным, но позволяет в какой-то мере привлекать в исследованиях аналитические подходы, а также проводить вычислительные эксперименты при степени дискретизации, достаточной по требованиям точности и приемлемой по вычислительным ресурсам.

Данная статья развивает результат работы [12] в направлении превращения алгоритмической схемы в практически работоспособный алгоритма и близка к [14,16] по подходу к планированию и программному обеспечению численных экспериментов.

2. Актуальность темы, цели и задачи работы.

Актуальность разработки алгоритмов и программ для расчета дифракционных полей при различных акустических свойствах частей пространства, разделяемого плоскостью экрана, объясняется тем, что во многих реальных задачах рассеивающие экраны лежат на подложке из более плотного материала (в акустических задачах) или из твёрдого диэлектрика (в электродинамических). Учёт этого обстоятельства существенно осложняет задачу, поэтому постановки задач первоначальных работ [2-11] его опускали. Однако метод параметрических интегральных представлений псевдодифференциальных уравнений позволяет концептуально просто учесть слоистую неоднородность пространства в плоскопараллельных задачах. Поэтому с недавних пор (после преодоления ряда технических проблем) такие задачи начинают ставиться и решаться в двумерной [17] и пространственной постановках [18,12].

В данной работе, следуя [12], принята постановка, в которой система плоских бесконечно тонких акустически жестких экранов (которую можно трактовать как один, но, вообще говоря, несвязный экран) располагается на плоской границе раздела двух однородных сред.

Цель данной работы – построение вычислительного алгоритма с его реализацией в форме компьютерной программы и проверка прикладной эффективности этого алгоритма в серии численных экспериментов.

Для осуществления поставленной цели нами решены задачи, которые позволяют осуществить следующее. Завершить построение прикладного алгоритма расчета рассеянного поля по соответствующей схеме МДО (разработанной в [12]), сравнить сложность постановки задачи дифракции для экрана на разделе сред со случаем экрана в однородном пространстве, испытать прикладную значимость разработанного нами программного обеспечения (комплекс Diffraction Studio 2.0), которое реализует построенный алгоритм.

3. Описание математической модели и постановка задачи о вычислительной эффективности моделирования

Представление о геометрии экрана, его расположении и характере “падающего поля” (моделируемого в нашем случае плоской волной) даёт Рис.1

Плоский бесконечно тонкий экран Σ геометрически представляет собой область (не обязательно односвязную) в плоскости XU , граница которой в представленных здесь вычислительных экспериментах принималась

составленной из отрезков, параллельных осям OX и OY . Физически это акустически жесткое препятствие для звуковых волн.

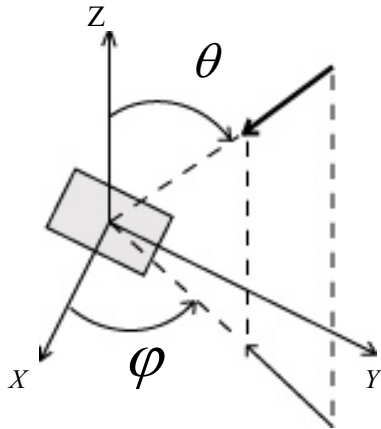


Рис. 1 Схема падения плоской волны на жесткий экран

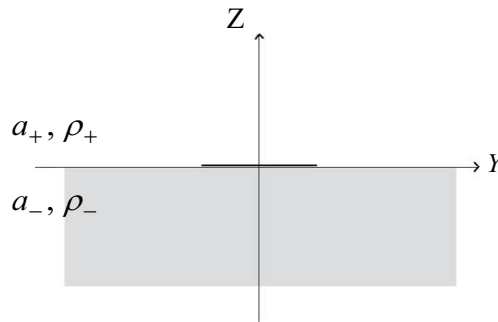


Рис. 2 Физические среды над и под плоскость экрана различны

В верхнем полупространстве

$$\{x = (\tilde{x}, x_3) \in R^3 \mid x_3 > 0\}, \quad \tilde{x} = (x_1, x_2) \in R^2$$

плотность принимается постоянной и равной ρ_+ , а в нижнем

$$\{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 < 0\}, \quad \tilde{x} = (x_1, x_2) \in R^2$$

также постоянной и равной ρ_- . Падающая волна и, соответственно, рассеянное поле считаются имеющими постоянную частоту ω , так что волновые числа в верхнем и нижнем полупространствах равны:

$$\begin{aligned} k_+ &= \frac{\omega}{a_+} & (x_3 > 0) \\ k_- &= \frac{\omega}{a_-} & (x_3 < 0) \end{aligned} \quad (1)$$

где a_+ и a_- - скорости распространения звуковых волн в верхнем и нижнем полупространствах.

Полное поле, наблюдаемое в процессе рассеяния плоской волны на экране ищем в виде:

$$v = p + w, \quad (2)$$

где p - падающее поле [12], а w - рассеянное поле, которое следует определить.

Краевая задача для уравнения Гельмгольца, которой удовлетворяет рассеянное поле [20]:

$$\Delta w + k_+^2 w = 0 \quad (x_3 > 0) \quad \Delta w + k_-^2 w = 0 \quad (x_3 < 0) \quad (3)$$

$$w|_{x_3=+0} = w|_{x_3=-0} \quad (x_3 = 0, \tilde{x} \notin \Sigma) \quad (4)$$

$$\left. \frac{1}{\rho_+} \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=+0} = \left. \frac{1}{\rho_-} \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=-0} \quad (\tilde{x} \notin \Sigma) \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=+0} = - \left. \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=+0} \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x_3} \right|_{x_3=-0} = - \left. \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=-0} \quad (\tilde{x} \in \Sigma) \quad (6)$$

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad } w(x) \right) - ik_{\pm} w(x) = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (\text{равномерно по } \frac{x}{|x|}) \quad (7)$$

$$\int_U (|w|^2 + |\nabla w|^2) dx < \infty \quad (\text{в окрестности } U \text{ края экрана } \partial\Sigma) \quad (8)$$

Поле w может быть согласно [12,18] выражено через функцию $u(\tilde{x})$, сосредоточенную на экране ($\text{supp } u \subseteq \Sigma$), которая является решением гиперсингулярного интегрального уравнения

$$u * K = f \quad \left(f(\tilde{x}) = \left. \frac{1}{\rho_+} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=+0} \right) \quad (9)$$

где $*$ - двумерная свертка, которая может пониматься в смысле обобщенных функций [21], а ядро – преобразование Фурье

$$K = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\rho_+} \gamma_+ \left(1 + \frac{\rho_- \gamma_+}{\rho_+ \gamma_-} \right)^{-1} e^{i(\lambda, \tilde{x})} d\lambda,$$

которое понимаем в смысле обобщенных функций, но в силу своей структуры оказывается суммой гиперсингулярного ядра и гладкой функции.

Согласно результату работы [12] для приближенного решения (9) можно использовать дискретную модель, основанную на решении следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\forall \nu: \sum_{\mu} u_{\mu} \left(-\xi_1 \cdot \text{a.f.p.} \iint_{\Sigma_{\mu}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{e^{ik_+|y-\tilde{x}_{\nu}|}}{|y-\tilde{x}_{\nu}|} dy + \right. \\ \left. + \xi_2 \cdot \iint_{\Sigma_{\mu}} \frac{e^{ik_+|y-\tilde{x}_{\nu}|}}{|y-\tilde{x}_{\nu}|} + \iint_{\Sigma_{\mu}} P(|y-\tilde{x}|) dy \right) = f(\tilde{x}_{\nu}), \quad (\tilde{x}_{\nu} \in \Sigma_{\nu}) \quad (10)$$

где a.f.p.- указывает на понимание «интеграла» в смысле конечной части по Адамару [6]

$$\xi_1 = \frac{1}{\rho_+ + \rho_-}, \quad \xi_2 = \frac{k_-^2 \cdot \rho_- + (\rho_- + 2\rho_+) \cdot k_+^2}{2 \cdot (\rho_- + \rho_+)^2}$$

$$P(\eta) \in C^{2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\Sigma = \bigcup_{\mu=1}^N \Sigma_{\mu}, \quad \Sigma_{\mu} \cap \Sigma_{\eta} = \emptyset, \mu \neq \eta$$

$$u = \sum_{\mu=1..N} u_{\mu} \cdot I_{\mu}(\tilde{x}), \quad I_{\mu}(\tilde{x}) = 1 \text{ если } \tilde{x} \in \bar{\Sigma}_{\mu}, \text{ иначе } 0$$

Задачи настоящей работы:

- разработка полного набора функций и процедур для прикладного алгоритма расчета рассеянного поля с оптимизацией вычислений элементов СЛАУ;
- повышение эффективности (точность за меньшее время) вычисления интегралов разной кратности специального вида от комплексозначных функций;
- экспериментальное исследование временной сложности программной реализации алгоритма для экрана на разделе сред (по сравнению со случаем экрана в однородном пространстве);
- испытание прикладных возможностей программной реализации алгоритма на подборке модельных постановок задач;

4. Разработка и оптимизация алгоритма расчета коэффициентов СЛАУ

Формула восстановления рассеянного поля в заданной точке содержит обычный интеграл и имеет вид:

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} u(y) \int_{R^2} \frac{e^{-\gamma_-(x_3-y_3)}}{\left(1 + \frac{\rho_- \gamma_+}{\rho_+ \gamma_-}\right)} e^{-i(\tilde{x}-\tilde{y}, \lambda)} d\lambda dy \quad (11)$$

В уравнении (9) и формуле (11) регулярные ядра являются двумерными преобразованиями Фурье центрально симметричных функций громоздкого, но явного вида [12,18]. Поэтому для вычисления интеграла

$$\iint_{\Sigma_{\mu}} P(|y-\tilde{x}|) dy, \quad (\Sigma_{\mu} \subset \Sigma)$$

запишем ядро в форме преобразования Фурье-Бесселя:

$$P(r) = \int_0^{\infty} |\lambda| \cdot j_0(r|\lambda|) \cdot \left[\frac{\rho_+ \rho_- (k_+^2 - k_-^2)^3}{2(\rho_+ + \rho_-)^2 \gamma_+ (\gamma_+ + \gamma_-)^3 (\rho_- \gamma_+ + \rho_+ \gamma_-)} - \frac{\rho_- (\rho_+ - \rho_-) (k_+^2 - k_-^2)^2}{2(\rho_+ + \rho_-)^2 (\gamma_+ + \gamma_-)^2 (\rho_- \gamma_+ + \rho_+ \gamma_-)} \right] \quad (12)$$

Первый интеграл в (10), который понимается там по Адамару можно трактовать также свертку характеристической функции ячейки Σ_{ν} с высоко сингулярным ядром. На такой интеграл можно распространить формулу типа Грина, которая позволяет придать ему форму, в которой используются обычные двумерные и криволинейные интегралы [6]. С учетом этого, уравнение (10) примет вид:

$$\forall v: \sum_{\mu} u_{\mu} \left(\xi_1 \cdot \oint_{\partial \Sigma_{\mu}} \left(\vec{dl} \times \nabla_y \frac{e^{ik_+|y-\tilde{x}_v|}}{|y-\tilde{x}_v|} \right) \cdot \vec{n} + \right. \\ \left. + \xi_2 \cdot \frac{i}{k_+} \int_0^{2\pi} e^{ik_+\Phi(\varphi)} d\varphi + \iint_{\Sigma_{\mu}} P(|y-\tilde{x}|) dy \right) = f(\tilde{x}_v), \quad (\tilde{x}_v \in \Sigma_v) \quad (13)$$

где преобразован также и второй интеграл. Он преобразован при помощи перехода в полярные координаты с центром в точке локализации особенности.

Основным этапом, занимающим вычислительные ресурсы, является этап формирования матрицы системы.

Анализ вида интегралов, необходимых для подсчета элементов матрицы, позволяет сократить количество вычисляемых элементов матрицы и, тем самым, уменьшить время ее формирования.

Если форма экрана прямоугольная и без отверстий, то структура матрицы при выбранной нами нумерации ячеек Σ_{μ} имеет блочнотеплицеву структуру [2]. В случае экрана - прямоугольная «рамка» мы применяем идентичную схему нумерации ячеек Σ_{μ} , а также алгоритм «фильтрации» для оптимизации счета элементов матрицы (отфильтровываются ранее вычисленные элементы).



Рис.3 Схема «фильтрации» элементов матрицы

Применение схемы фильтрации (Рис.3) возможно благодаря свойству вычисляемых интегралов, зависящих от расстояния, что позволяет естественным образом ввести их параметризацию и организовать хранение вычисленных значений.

Прямоугольный экран Σ покрывается $N_1 \times N_2$ ячейками Σ_{μ} и может содержать отверстие, покрываемое $M_1 \times M_2$ ячейками той же сетки.

Табл. 1 Затраты на формирование матрицы системы по числу различных вычисляемых элементов

	Произвольный экран	Сплошной прямоугольный экран	Прямоугольный экран с отверстием
Матрица	общего вида	блочно-теплицева	общего вида, много повторяющихся элементов
Размерность матрицы	$N_1 N_2 \times N_1 N_2$	$N_1 N_2 \times N_1 N_2$	$(N_1 - M_1)(N_2 - M_2) \times (N_1 - M_1)(N_2 - M_2)$
Количество ГС интегралов для вычислений	$N_1 \cdot N_2$	1	1
Количество обычных интегралов для вычисления	$N_1 N_2 \cdot (N_1 N_2 - 1)$	$N_1 \cdot N_2 - 1$	порядка $N_1 \cdot N_2$, зависит от конкретного вида экрана
Чем достигнуто	-	Удачной структурой матрицы	Применением «фильтрации»

5. Повышение эффективности вычисления интегралов разной кратности специального вида от комплексозначных функций

Важнейшей характеристикой эффективности алгоритма в нашей задаче является возможность такой его программной реализации, при которой исследователь может получить решение за приемлемое время с достаточной точностью на ПК. Поэтому естественно рассмотреть задачу повышения эффективности (в смысле – точность за меньшее время) путем отбора наиболее производительных методов вычисления интегралов при формировании коэффициентов матрицы, расчета диаграмм направленности и полей.

Версия Diffraction Studio 2.0 разработана на языке FORTRAN с тем, чтобы максимально использовать отлаженные и многократно опробованные стандартные процедуры как самого FORTRAN – библиотеки IMSL, так и набор подпрограмм «Библиотеки численного анализа НИВЦ МГУ»

Табл. 2.1 Краткая характеристика проанализированных процедур вычисления однократных интегралов по отрезкам

FORTRAN IMSL	БЧА НИВЦ МГУ
DQDAGS - предназначена для вычисления однократного интеграла от функции по отрезку с заданной абсолютной и относительной погрешностями	QSS1D – предназначена для вычисления однократного интеграла по обобщенной квадратурной формуле Симпсона с заданной абсолютной погрешностью
DQDAG - предназначена для вычисления однократного интеграла	QSL1D - предназначена для вычисления однократного интеграла

функции с использованием квадратур Гаусса-Кронрода с заданной абсолютной и относительной погрешностями	по формулам Лобатто 11-й степени точности QSK2D - предназначена для вычисления однократного интеграла по обобщенной квадратурной формуле Ньютона-Котеса, точной для многочленов 9-й степени
--	---

Для эффективного вычисления однократных интегралов по отрезкам среди рассматриваемых (см. Табл.2.1) была выбрана процедура **DQDAG**. На этот выбор однозначно указывают результаты тестовых прогонов соответствующих версий программы Diffraction Studio (v.1,2). Использование **DQDAG** не только позволило контролировать погрешности, но и адаптировать счет к осциллирующим интегралам.

Вычисления проводились с относительной погрешностью 10^{-5} , значение параметра для квадратур Гаусса-Кронрода выбиралось для осциллирующих интегралов равным 6 (30-61 узел)

Табл. 2.2 Краткая характеристика проанализированных процедур вычисления однократных интегралов по большому (в нашем случае - полубесконечному) отрезку

FORTRAN IMSL	БЧА НИВЦ МГУ
Специализированные процедуры отсутствуют, предлагается вычислять процедурами DQDAG , DQDAGS	QSL4D - предназначена для вычисления определенного интеграла для больших отрезков интегрирования по формулам Лобатто 11-ой степени с гарантированной точностью

Для вычислений однократных интегралов по полубесконечным отрезкам интегрирования была выбрана процедура **QSL4D**, т.к. она оптимизированная для счета интегралов по большому отрезку интегрирования (см. Табл.2.2). Вычисления проводили с относительной точностью 10^{-4}

Табл. 2.3 Краткая характеристика проанализированных процедур вычисления двукратных интегралов по прямоугольной области

FORTRAN IMSL	БЧА НИВЦ МГУ
DQAND – предназначена для вычисления двукратного интеграла функции по гиперчетырёхугольнику DTWODQ - предназначена для вычисления двукратного интеграла от функции с использованием квадратур Гаусса-Кронрода с заданной абсолютной и относительной погрешностями	QS81D - предназначена для вычисления определенного N - кратного (N=2..15) интеграла по прямоугольному параллелепипеду методом Гаусса с заданной абсолютной погрешностью QS82D - предназначена для вычисления определенного N - кратного (N=2..15) интеграла по прямоугольному параллелепипеду методом Гаусса

Из проанализированных нами библиотечных подпрограмм вычисления интегралов по прямоугольнику (см. Табл.2.3), в качестве достаточно

эффективных зарекомендовали себя **QS81D**, **DQAND** и **DTWODQ**. Причем в случае наличия осцилляций предпочтение отдавалось **DTWODQ** (вычисления проводили с относительной погрешностью 10^{-5} , значение параметра для квадратур Гаусса-Кронрода выбиралось для осциллирующих интегралов равным 6 (30-61 узел)), а в остальных случаях - **QS81D**, **DQAND**, разделяя применение только временем счета конкретных интегралов.

Несмотря на разнообразие стандартных процедур вычисления в некоторых случаях для достижения поставленной цели эффективности нам пришлось разрабатывать на их основе собственные процедуры вычислений. Некоторые такие случаи приведены ниже.

В связи с этим отметим, что для вычисления матрицы СЛАУ, полей и диаграмм направленности необходимо вычислять интегралы следующего вида

$$I = \int_{\Sigma_{\mu}} f(x) K(|x|) dx, \text{ где } K(\xi) = \int_{R^p} g(\xi, y) dy \stackrel{def}{=} K_p, \quad p = 1, 2 \quad (14)$$

где значения $f(x), g(\xi, y)$ - комплексные.

При изучении возможности применения стандартных процедур оказалось, что все подпрограммы настроены на работу с действительными подинтегральными функциями. Стандартным приемом является вычисление по очереди Re и Im частей подинтегральной функции. Но в данном случае он не эффективен потому, что функция $K(\xi)$ в (14) также комплекснозначная, а вычисление интеграла от нее весьма трудоемко. Вычисляя Re и Im частей интеграла I по очереди, при $p=2$ приходится четырежды возвращаться к вычислению двойных интегралов вида K_p . Оказалось, что в таком случае, несмотря на более быстрое вычисление вещественных интегралов по сравнению с комплексными, вычисление одного комплексного интеграла вида K_2 дает ускорение счета примерно в 3 раза (PC 512M 1.6GHz).

Для вычисления таких комплексных интегралов необходимо найти компромисс между скоростью и точностью вычисления, поэтому автором была разработана подпрограмма, вычисляющая двумерный интеграл (приближенно по Симпсону) от комплекснозначной функции, используя стандартные процедуры IMSL. Также возможен другой подход, создавая при первом счете $K(\xi)$ кеш вычисленных значений (при наличии необходимых ресурсов памяти), и при остальных – использование этих значений.

Дополнительные затруднения вызывают вычисление интегралов вида

$$\int_0^{\infty} f(\xi) \cdot j_0(|x| \cdot \xi) \cdot d\xi \quad (15)$$

где $j_0(t)$ - функция Бесселя 0-го порядка.

Мы считаем нецелесообразным использование при вычислении (15) полиномиального представления для функции Бесселя и построение с его помощью квадратурной формулы для всего интеграла. Это связано, во первых, с неисследованной точностью представления такой квадратурой исходного

интеграла, а также с тем, что библиотека IMSL располагает хорошо оптимизированной для счета процедурой вычисления функции Бесселя. Таким образом, при вычислении интегралов вида (15) мы использовали стандартную процедуру вычисления функции Бесселя и построенную на ее основе квадратурную формулу для интеграла (15). Бесконечный интервал интегрирования мы на практике заменяли конечным интервалом, правый конец которого определялся экспериментально и по величине был порядка 100.

6. Сравнительные затраты времени

Одним из показателей эффективности вычислений является экономия времени, необходимого исследователю для планирования и проведения содержательного вычислительного эксперимента. В связи с усложнением физической задачи и, как следствие, усложнением вычислений мы изучили этот вопрос на примере изменения времени вычислений в сравнении с упрощенной постановкой, рассмотренной нами ранее [12,16].

На рис.4 изображены диаграммы роста времени вычислений матрицы системы и общего времени вычислений в случае наличия ($k_+ = \frac{3}{2}\pi, k_- = 2\pi$) и отсутствия ($k_+ = k_- = 2\pi$) разделения пространства на две среды.

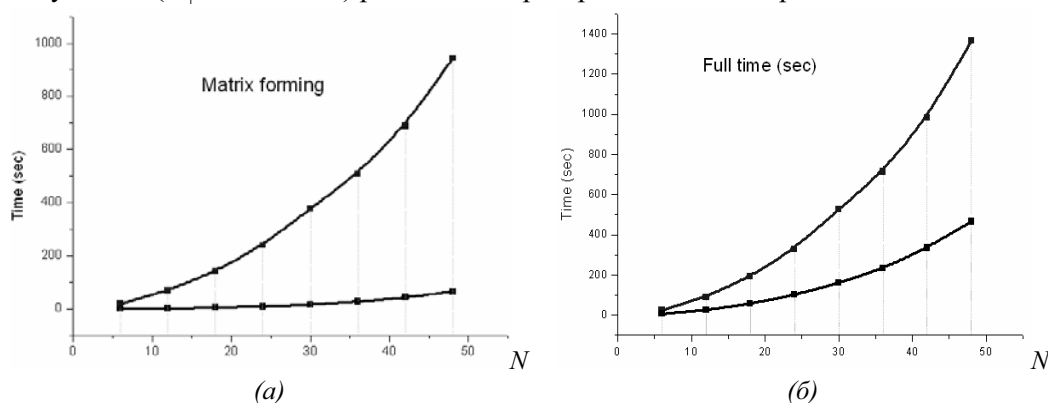


Рис.4 Время формирования матрицы (а) и полное время решения (б) в зависимости от разбиения для случаев $k_- \neq k_+$ (верхняя) и $k_- = k_+$ (нижняя кривая)

Как видно из диаграмм, в нашем случае наблюдается нелинейная зависимость времени вычислений от параметра дискретизации. В приведенных на Рис. 4 (а) примерах наблюдалась (при величине достоверности аппроксимации $R^2 = 0.9999$):

при $k_- \neq k_+$

$$t = 0.2305 \cdot N^5 - 4.4459 \cdot N^4 + 31.461 \cdot N^3 - 81.3 \cdot N^2 + 148.89 \cdot N - 70.242$$

при $k_- = k_+$

$$t = 0.6525 \cdot N^3 + 0.1322 \cdot N^2 + 16.896 \cdot N - 12.792$$

где t - время формирования матрицы, N - количество расчетных точек по одной из сторон квадратного экрана.

Интервал для параметра дискретизации в опытах по оценке времени вычислений выбирался нами с большим перекрытием тех значений, которые достаточны для приемлемой точности в расчётах полей (см. [6,14-17]).

7. Испытание алгоритма на системе модельных и реальных тестовых примеров и анализ результатов вычислений

Рассмотрим 6 примеров постановки различных задач, требующих ответа на некие вопросы путем проведения вычислительных экспериментов.

Задача 1. Сравнить счёт в частном случае $k_- = k_+$ с результатами, получаемыми по модели рассеяния на экранах в однородной среде [14].

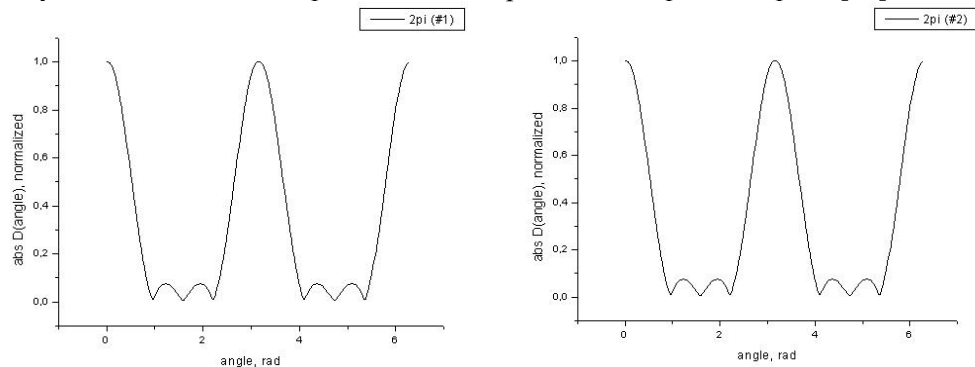


Рис.5 Сравнение нормализованных диаграмм направленности для функции u в случае $k_- = k_+ = 2\pi$ (слева диаграмма, полученная в Diffraction Studio 1.0)

При $k_- = k_+ = 2\pi$ сравнивались результаты работ программ Diffraction Studio 2.0 и Diffraction Studio 1.0 (Diffraction on Rectangle [14]). Элементы матриц СЛАУ совпали с точностью 10^{-5} , и, согласно расчёта, например, практически совпали диаграммы направленности (рис. 5).

Задача 2. Исследовать влияние изменения свойств одной из сред на диаграмму направленности поля рассеянного поля w (экран $[-1, 1] \times [-1, 1]$, $k_+ = 2\pi$, k_- меняется с шагом 0.1 в интервале $\pi \dots 3\pi$). В результате (рис. 6) наблюдалась картина плавного и незначительного колебания вида диаграммы направленности относительно ее значения в однородной среде.

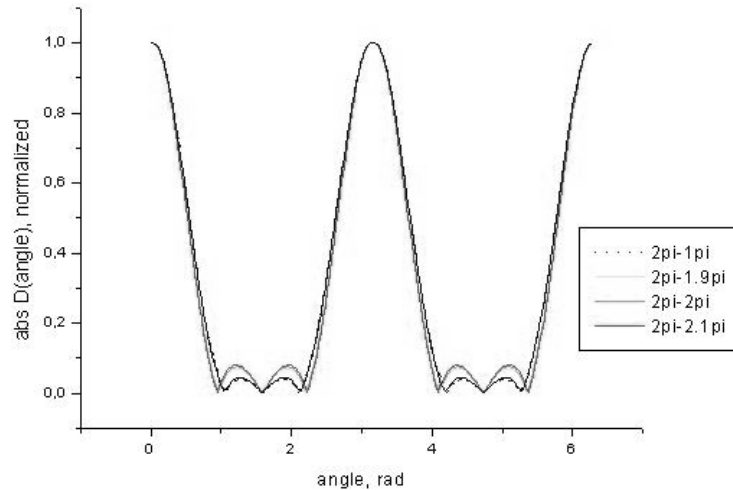


Рис. 6 Эволюция модуля нормализованной диаграммы направленности при изменении свойств первой среды

Задача 3. Табулировать значения функционала, аналогичного по виду плотности энергии поля:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2} \quad (21)$$

Целью эксперимента было получить численно эволюцию значений этого функционала при изменении расстояния h до плоскости экрана по компоненте x_3 : $(x_k, 0, h)$ $h = 0.1, 0.5, 1.0$ и $x_k = -0.6 + k \cdot 0.1, k = 0..12$.

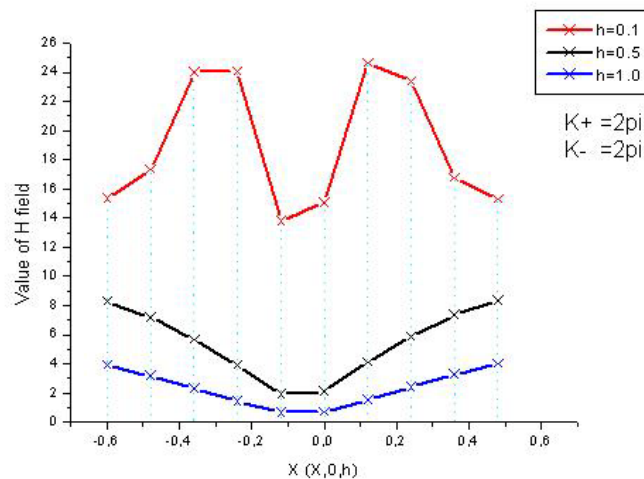


Рис. 7 Изменение вида графика функционала Q при удалении от экрана на расстояние h

Такого рода данные позволяют подготовить и провести сравнение с соответствующими результатами моделирования в двумерных задачах дифракции. Один из результатов эксперимента приведен на рис. 7

Сравнение выхода наших программ с результатами численного моделирования в двумерных задачах здесь не рассматривается. Оно требует валидации контрольных программ, реализующих двумерные модели, на уровне математической строгости этих моделей [7,22]. Такая работа ждёт оформления.

В следующих примерах используются данные реальных сред – воды и стекла: $\rho_+ = 999.03 \text{ кг/м}^3$, $a_+ = 1460 \text{ м/с}$ (пресная вода) и $\rho_- = 2500 \text{ кг/м}^3$, $a_- = 2350 \text{ м/с}$ (стекло). $k_+ = 12.56637$, $k_- = 7.807192$. При этом экраны (в отличие от [12]) не являются прямоугольниками (рис.8): «уголок» (вариант (с)), «рамка» (вариант (а)) и «решетка» (вариант (b)).

Задача 4. Исследовать зависимости ДН от угла падения плоской волны (в верхнем полупространстве) на экраны разных форм.

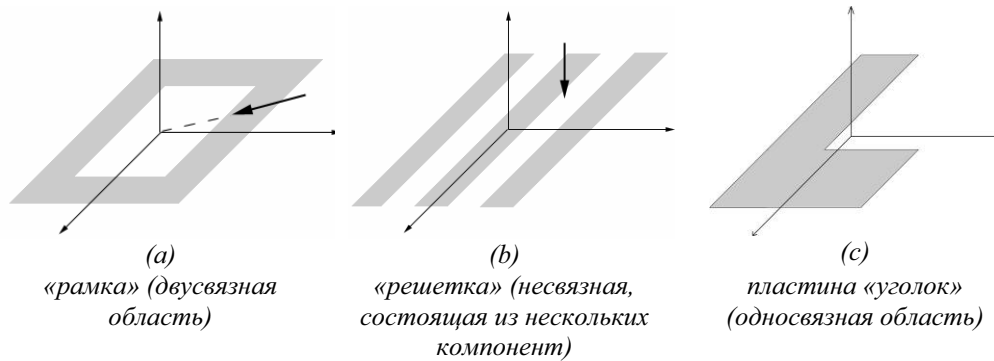
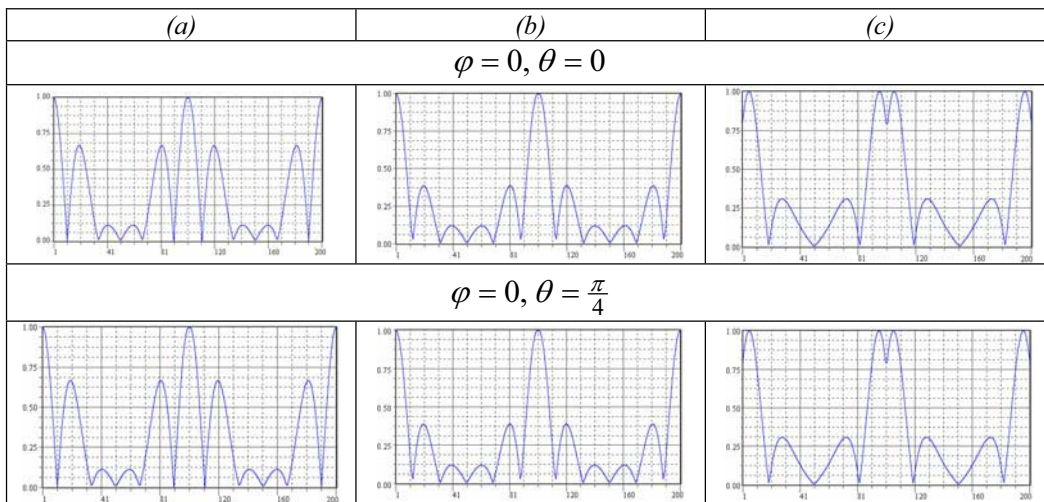


Рис. 8 Рассеивающие экраны различных рассмотренных форм



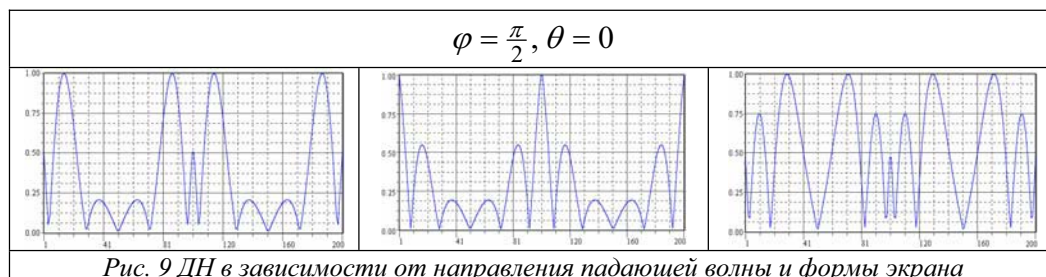


Рис. 9 ДН в зависимости от направления падающей волны и формы экрана

Анализируя результаты вычислений, можно констатировать зависимость формы ДН от азимутального угла φ и практически не чувствительность к изменению зенитного угла θ направления падающего поля ($0 \leq \theta \leq \pi/3$).

Задача 5. Исследовать влияние на диаграмму направленности площади квадратного отверстия в первоначально квадратном экране (см. рис 8 (а).) при условии неизменности площади экрана.

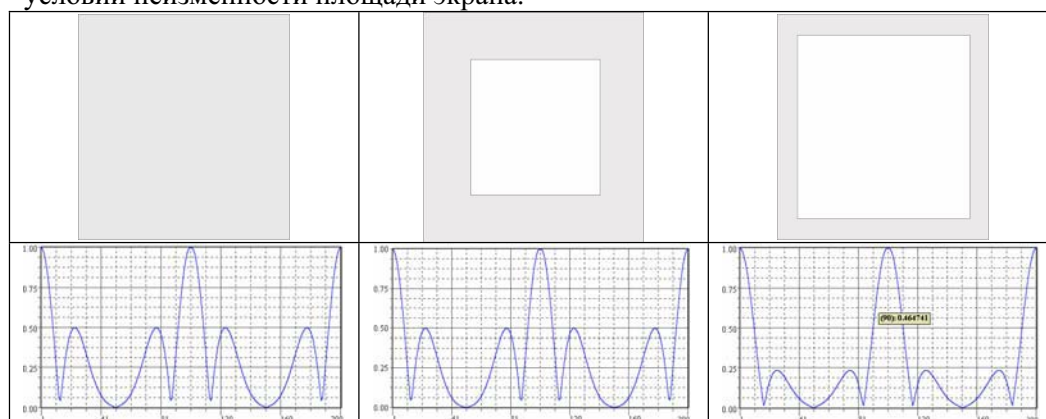


Рис. 10 Пример изменения ДН для структуры типа (а)

При анализе наблюдается уменьшение величины боковых лепестков с увеличением площади отверстия, однако это происходит не равномерно при увеличении площади отверстия.

8. Заключительные выводы

Для дифракционной задачи работы [12] построен и форсирован алгоритм реализации численного решения на базе МДО по алгоритмической схеме [12].

Этот алгоритм испытан в форме его программной реализации проведением вычислительных экспериментов. Удалось получить подтверждение того, что, по крайней мере, один из методов [12] выделения главной части ядра ГСИУ задачи (он отражается нашей формулой (10)) приводит к устойчивым вычислениям.

То, что такой счёт может использоваться в прикладных целях даже на рядовом персональном компьютере, доказывается приемлемой определённойостью ответов в ряде тестовых задач при жестких ограничениях на порядок дискретизации.

Конечно, принятая нами постановка задачи дифракции скалярных волн на плоских экранах, предусматривающая различие в свойствах среды над и под плоскостью экрана, приводит к существенному усложнению вычислений. Это приводит к повышению степени нелинейного роста его продолжительности и

требуемой памяти с ростом параметра дискретизации задачи. Не менее важен и фактор усложнения вычисления коэффициентов СЛАУ, потенциально способный влиять на точность вычислений. На основании полученных и обобщенных в настоящей работе результатов вычислительных экспериментов прикладникам станет легче решать вопрос о целесообразности учёта в поставках решаемых ими задач различия сред над и под рассеивающим экраном.

В дальнейшем представляет интерес сравнение результатов, которые можно получить разработанными здесь средствами для вытянутых прямоугольных экранов ширины l в 3-мерном пространстве, с результатами вычислений по двумерной модели МДО для отрезка длины l . Сложность такой задачи связана с привлечением стороннего программного обеспечения МДО 2-мерных задач. Этим проблемам (и содействию их преодоления) посвящена статья [22].

Автор благодарит своего научного руководителя Мищенко В.О. за советы и постоянное внимание к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, - М.: Наука, 1985. – 256с.
2. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы //ДАН СССР, 1984,- т.286, вып. 1., С. 96-100.
3. Гандель Ю. В., Лифанов И. К. О приложении идей метода дискретных вихрей к задачам электродинамики //Научно-методические материалы по численным методам.- М.: ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, 1985. – С.3-13
4. Гандель Ю. В. Метод дискретных вихрей в задачах электродинамики //Вопросы кибернетики, изд. АН СССР, М.: С. 166-183
5. Anfinogenov A. Yu., Lifanov I. I. On numerical solution of integral equations of planar and spatial diffraction problems. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. – 1992. – Vol. 7, N 5, P. 387-404.
6. Лифанов И. К., Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент, М.: ТОО "Янус", 1995. - 520с.
7. Гандель Ю. В., Мищенко В. О. Математическое моделирование в электродинамике на базе сингулярных интегральных уравнений и проект программной системы // Математическое моделирование. Сб. науч. тр. НАН Украины. Ин-т. математики. – Киев, 1996. – С.70-74
8. Щербина В. А. Граничные уравнения для квазистационарной задачи дифракции электромагнитного поля в R^3 на идеально проводящем разрезе // Труды VII Международного симпозиума «МДОЗМФ». – Феодосия, 1997. – С.234-235.
9. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – М.: Янус-К.– 2001.– 508 с. - С.53-58
10. Гандель Ю. В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ-2003.-Харьков-Херсон,2003.-

11. Антонец А. В., Гандель Ю. В. Численный анализ гиперсингулярного уравнения задач дифракции на плоском экране // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2003. – № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 9-14.
12. Гахов А. В., Мищенко В. О. Трехмерная модель метода дискретных особенностей рассеяния скалярных волн экраном на границе раздела сред // Вестник ХНТУ.-2006.-№2(25)С.135-140
13. Анфиногенов А. Ю. Численное решение задачи расчёта экологической обстановки в городе по фактору шума методом дискретных особенностей // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Вип. 1. - № 590, 2003. - С. 15-18.
14. Гахов А. В., Мищенко В. О. Вычислительный эксперимент на базе численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения для прямоугольной области // Вестник Харьковского национального университета. Серия "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления": вып. 1, - 2003г. - С.84-91
15. Петров Д. Ю. Исследование сходимости квадратурных формул математической модели трехмерной векторной задачи дифракции // Вестник Харк. нац. ун-та., – 2003. – № 590. Сер. "Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления", вып. 1. – С. 193-196.
16. Гахов А. В. Численные эксперименты на базе программной реализации 3-мерной акустической задачи дифракции на плоском экране // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005). Харьков-Херсон. 2005. – С.93-96
17. Антонец А. В. Математическая модель на базе МДО многоэлементной полосковой антенны на экранированной диэлектрической подложке // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». Вип. 5. - № 703, 2005. - С. 25-35.
18. A. Gahov, V. Mishchenko The Hypersingular Equation Technique for the 3-d Problem of Diffraction on a Metal Screen in a Stratified Medium // Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Kharkiv, Ukraine, June 26-29 2006, - Pp.602-604.
19. Гахов А. В. Экспериментальное определение параметров достоверного моделирования дифракции на предфракталах методом дискретных особенностей // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ», вып. 4, Орел. ОГУ, 2006. – С.23-29
20. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния, М.: Мир, 1987 – 311с.
21. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике - М.: Наука, 1979. - 318 с.
22. Мищенко В. О., Программное обеспечение МДО: роль математических моделей надежности и трудоемкости // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ», вып. 4, Орел. ОГУ, 2005. – С.73-8