

Модель системы массового обслуживания с отказами и с неординарным входным потоком

В. П. Городнов

*Академия внутренних войск Министерства внутренних дел Украины,
Народная украинская академия, Украина*

For markovian processes with continuous time and discrete states the theorem about conditions of states groups forming for the purpose of equations record for such groups is proved. Theorem outcome for process CW operation and groups stations equation forming regulation are formulated. Regulation is used for deducing analytic description of final probabilities of states for queue system model with refusals and unordinary entry aspirations stream. An analytic formula correctness is verified by the way of their transition into known Erlang formulas in the case of unordinary entrance stream degeneration into simple stream.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Существует большая группа микро экономических систем (предприятий, систем связи, банковских и иных учреждений) динамика работы которых связана с заранее неизвестными моментами времени поступления заказов, покупателей, вызовов, клиентов и т.п., каждый из которых для конкретной системы представляет собой требование на обслуживание. Интервалы времени Δt между требованиями и длительность обслуживания T_o случайны, имеют математическое ожидание $M[\Delta t]=I^{-1}$, $M[T_o]=\mu^{-1}$ соответственно и удовлетворяют условиям предельной теоремы А. Я. Хинчина [1, стр. 64–68] о формировании простейшего потока событий. Математическое ожидание числа событий потока в единицу времени принято называть [1, стр. 20] интенсивностью (I) потока. Для таких процессов известны модели n -канальных систем массового обслуживания, например с отказами, описываемые формулами Эрланга [2] для вероятностей P_k состояний S_k , в которых в системе находится ровно k требований:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad 0 \leq k \leq n; \quad \rho = \frac{I}{\mu}; \quad P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Однако входной поток может включать группы требований с заранее неизвестным составом, поступающие в систему в один и тот же момент времени. Так на автозаправочную станцию могут поступать группы автомобилей из авто колонн, в придорожный ресторан посетители могут приходить группами в моменты прибытия автотранспорта, поток клиентов в гостиницу включает как одиночных клиентов, так и их группы (например, семьи) в составе нескольких человек. Такой поток называется неординарным. Оценка вероятностей состояний систем массового обслуживания неординарного

входного потока требований считается возможной лишь численными методами для конкретной структуры потока. Наиболее успешной попыткой исследования модели обслуживания неординарного потока являются работы А. Шахбазова [3]. Однако аналитическое описание финальных вероятностей системы обслуживания неординарного входного потока отсутствует, что делает тему статьи актуальной.

2. Истоки исследования автора

Настоящая работа опирается на систему утверждений о свойствах неординарного (общего стационарного) потока [1, стр. 14, 42, 43], которые приведем без доказательства.

Общим стационарным потоком без последствия называется стационарный поток *моментов* времени поступления групп событий, который также является простейшим.

Неординарный поток включает *группы* по i *событий* ($i=1, 2, \dots$) в группе и может быть определен путем задания закона распределения вероятностей (a_i) поступления групп в составе i событий в любой очередной группе. Тогда параметр потока (частота появления групп событий), обозначим эту величину символом λ , окажется меньше интенсивности потока ($\lambda < I$). Для случайных интервалов времени между группами событий в таком потоке сохраняется справедливость предельной теоремы А. Я. Хинчина [1] и форма показательного распределения интервалов времени, но уже с параметром λ :

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (2)$$

При этом для выполнения равенства ($\lambda = I$) необходимо и достаточно иметь $a_1 = 1$. В таком случае поток событий становится простейшим. Для всех остальных (неординарных) стационарных потоков без последствия интенсивность потока всегда больше его параметра ($I > \lambda$).

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Каждому значению вектора вероятностей (a_i) поступления групп требований соответствует свое численное описание модели обслуживания неординарного потока, что не способствует оптимизму в исследовании таких систем. Нерешенной остается частная задача аналитического описания модели обслуживания неординарного потока. Решение отмеченной и схожих задач может быть получено в случае решения проблемы выявления еще одного фундаментального свойства марковских процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями, которое (свойство) может быть инструментом для получения искомых моделей.

Целью работы является доказательство еще одного свойства марковских процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями и с его помощью – получение аналитического описания модели системы массового обслуживания с отказами и с неординарным входным потоком.

4. Основной материал

4.1. Теорема, ее следствия и правила составления уравнений

Предположим, что модель процесса (или системы) представлена в классе марковских процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями и показана размеченным графом (рис. 1), каждая вершина S_i которого соответствует возможному состоянию процесса (системы), а вся совокупность вершин образует замкнутое множество X .

Потоком переходов по стрелке (по ребру) графа (см. рис. 1) назовем произведение интенсивности переходов ξ_{ij} по этой стрелке на вероятность (P_i) того состояния из которого стрелка выходит:

$$\xi_{ij} \times P_i.$$

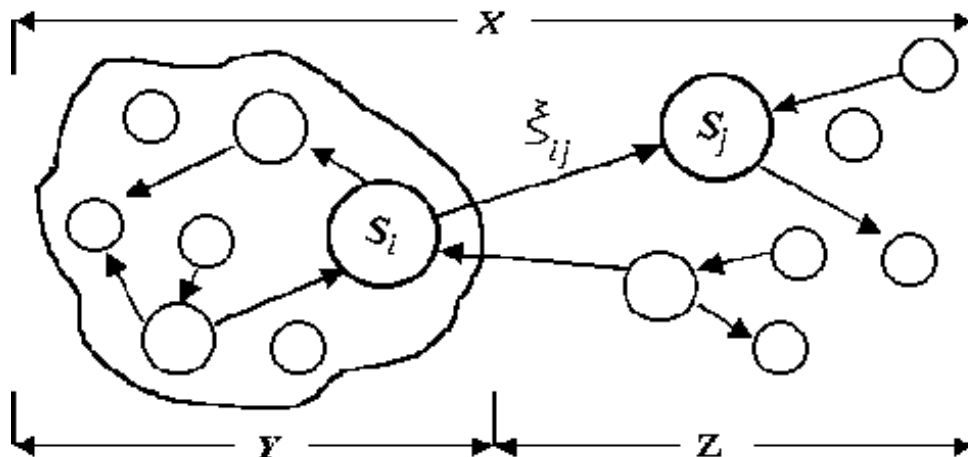


Рис. 1. Граф модели процесса

Теорема. Производная вероятности нахождения процесса в подмножестве вершин графа, охваченном замкнутым контуром, не зависит от потоков переходов внутри подмножества вершин и равна алгебраической сумме потоков переходов по ребрам графа, пересекающим контур разбиения. Входящие потоки имеют знак плюс, выходящие – знак минус.

Доказательство. Пусть множество X вершин графа разбито замкнутым контуром на два непересекающихся подмножества Y и Z (см. рис.1):

$$Y \cap Z = \emptyset, \quad Y = X - Z.$$

Обозначим вероятности нахождения процесса в каждом подмножестве вершин:

$$P_X(t) = P_Y(t) + P_Z(t) = \sum_{i \in X} P_i(t); \quad P_Y(t) = \sum_{i \in Y} P_i(t); \quad P_Z(t) = \sum_{i \in Z} P_i(t). \quad (3)$$

Продифференцируем выражения для вероятностей $P_Y(t)$, $P_Z(t)$, получим:

$$\dot{P}_Y(t) = \sum_{i \in Y} \dot{P}_i(t); \quad \dot{P}_Z(t) = \sum_{i \in Z} \dot{P}_i(t). \quad (4)$$

Будем считать, что $\xi_{ij} = 0$, если из вершины S_i нельзя перейти в вершину S_j за один шаг.

Вероятность $P_i(t)$ нахождения процесса в отдельной вершине S_i марковского графа, например подмножества вершин X , определяется выходящими и входящими в это состояние потоками переходов и описывается дифференциальным уравнением Чепмена-Колмогорова [2]:

$$\dot{P}_i(t) = -P_i(t) \times \sum_{k \in X} \xi_{ik} + \sum_{k \in X} P_k(t) \times \xi_{ki}. \quad (5)$$

Подставляя формулу (5) в (4) для каждого из подмножеств вершин и выделяя потоки переходов через контур разбиения, получим:

$$\begin{aligned} \dot{P}_Y(t) = & \sum_{i \in Y} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{ik} + \sum_{k \in Y} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] - \\ & - \sum_{i \in Y} P_i(t) \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij} + \sum_{j \in Z} P_j(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{jk}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_Z(t) = & \sum_{i \in Z} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Z} \xi_{ik} + \sum_{k \in Z} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] - \\ & - \sum_{j \in Z} P_j(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{jk} + \sum_{i \in Y} P_i(t) \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij}. \end{aligned} \quad (7)$$

Определяя сумму вероятностей $\dot{P}_Y(t)$ и $\dot{P}_Z(t)$ (формулы (2.23, 2.24)), замечаем, что слагаемые вне квадратных скобок взаимно сокращаются и остается:

$$\begin{aligned} \dot{P}_Y(t) + \dot{P}_Z(t) = & \sum_{i \in Y} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{ik} + \sum_{k \in Y} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] + \\ & + \sum_{i \in Z} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Z} \xi_{ik} + \sum_{k \in Z} P_k(t) \times \xi_{ki} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудно показать, что выражение (8) тождественно равно нулю при любых значениях входящих в него переменных. Действительно, из формул (3) находим:

$$P_X(t) = P_Y(t) + P_Z(t) = \sum_{i \in X} P_i(t).$$

Вследствие замкнутости множества X для вероятностей состояний этого множества выполняется условие нормировки:

$$P_X(t) = \sum_{i \in X} P_i(t) = P_Y(t) + P_Z(t) = 1. \quad (9)$$

Дифференцируя равенство (9), получим:

$$\sum_{i \in X} \dot{P}_i(t) = \dot{P}_Y(t) + \dot{P}_Z(t) = 0. \quad (10)$$

В силу равенства (10) выражение (8) можно записать так:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i \in Y} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{ik} + \sum_{k \in Y} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] = \\ & = \sum_{i \in Z} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Z} \xi_{ik} + \sum_{k \in Z} P_k(t) \times \xi_{ki} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Из равенства (11) следует, что суммарный поток переходов из подмножества вершин Y равен суммарному потоку переходов в подмножество вершин Z .

Однако в равенстве (11) поток переходов из множества вершин Y не содержит ни одной интенсивности ξ_{ij} , для которой номер i или j принадлежит множеству вершин Z , также как и входящий поток в множество вершин Z не содержит ни одной интенсивности ξ_{ij} , для которой номер i или j принадлежат множеству вершин Y . Кроме того, при произвольном выделении двух подмножеств (Y и Z) одно из них может быть пустым, соответственно с нулевым суммарным поток переходов.

Следовательно, равенство (11) может иметь место только в случае, когда суммарные потоки переходов в левой и правой частях равенства (11) строго равны нулю, т.е.:

$$\sum_{i \in Y} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{ik} + \sum_{k \in Y} P_k(t) \times \xi_{ki} \right] = 0;$$

$$\sum_{i \in Z} \left[-P_i(t) \times \sum_{k \in Z} \xi_{ik} + \sum_{k \in Z} P_k(t) \times \xi_{ik} \right] = 0.$$

Таким образом, первые слагаемые в формулах (6) и (7), представляющие суммарный поток переходов внутри подмножеств вершин Y и Z соответственно, равны нулю при любых значениях входящих в формулы переменных величин. В правых частях формул (6) и (7) дифференциальных уравнений для вероятностей нахождения процесса в выделенных группах вершин остаются только потоки переходов по ребрам графа, пересекающим контур разбиения:

$$\dot{P}_Y(t) = - \sum_{i \in Y} P_i(t) \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij} + \sum_{j \in Z} P_j(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{jk}; \quad (12)$$

$$\dot{P}_Z(t) = - \sum_{j \in Z} P_j(t) \times \sum_{k \in Y} \xi_{jk} + \sum_{i \in Y} P_i(t) \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij}. \quad (13)$$

Теорема доказана.

Учитывая то, что в правых частях уравнений (12) и (13) оказались алгебраические суммы потоков переходов с соответствующими знаками, можно сформулировать правило записи дифференциальных уравнений для вероятностей нахождения моделируемого процесса в группах состояний.

Правило контуров. Производная вероятности нахождения процесса в группе состояний, охваченных замкнутым контуром, равна алгебраической сумме потоков переходов по стрелкам (ребрам) графа, пересекающим контур разбиения. Исходящие потоки берутся со знаком минус, входящие – со знаком плюс.

В частном случае, когда внутри замкнутого контура оказывается только одна вершина, соответствующая состоянию S_i моделируемого процесса, правило контуров переходит в известное [2] правило составления дифференциальных уравнений Чепмена-Колмогорова для одного состояния и обеспечивает запись уравнения (5).

Следствие. В стационарном режиме суммарный поток переходов через любой замкнутый контур на марковском графе равен нулю.

Действительно, условием стационарного режима процесса является:

$$\dot{P}_Y(t) = \dot{P}_Z(t) = 0.$$

Тогда выражения (12) и (13) преобразуются к общему виду:

$$-\sum_{i \in Y} P_i \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij} + \sum_{j \in Z} P_j \times \sum_{i \in Y} \xi_{ji} = 0,$$

определяющему суммарный поток переходов через контур разбиения, что позволяет сформулировать правило записи уравнений баланса потоков переходов через контур разбиения, позволяющее значительно упростить анализ моделей реальных процессов.

Правило баланса потоков. Для стационарного режима сумма потоков переходов, входящих в замкнутый контур на графе состояний процесса, равна сумме выходящих потоков:

$$\sum_{j \in Z} P_j \times \sum_{i \in Y} \xi_{ji} = \sum_{i \in Y} P_i \times \sum_{j \in Z} \xi_{ij}.$$

Найденное свойство позволяет значительно упростить анализ марковских моделей реальных процессов в микро экономических системах. Отказавшись от описания отдельных состояний и переходя к анализу вероятностей нахождения процесса в группах состояний, объединяемых из физических соображений согласно целям анализа по интересующему в ходе исследования признаку, в ряде случаев удастся получить аналитическое описание моделей, исследование которых было возможно только численными методами, что приводило к потере общности анализа и оперативности моделирования.

4.2. Многоканальная система обслуживания групп требований с отказами, введение.

Процесс работы такой системы массового обслуживания связан с поступлением в случайные моменты времени групп требований с заранее неизвестным составом. Каждая группа может содержать ровно i требований, нуждающихся в индивидуальном обслуживании, то есть в предоставлении требованию индивидуального канала обслуживания, который (канал) будет занят обслуживанием этого требования, в среднем $(1/\mu)$ времени.

Заявкой на обслуживание назовем группу в составе i требований, поступивших в систему обслуживания в один и тот же момент времени (одновременно). Как правило, всегда существует разумная оценка максимально возможного числа (L) требований в одной заявке ($i \leq L$).

Заранее угадать количество требований в очередной заявке, как правило не удается и эту величину (i) приходится считать случайной. Однако наблюдение за потоком заявок позволяет оценить долю (a_i) заявок, включающих ровно i требований в составе общего потока заявок в систему обслуживания. Величина (a_i) в таком случае может служить оценкой вероятности того, что очередная заявка в своем составе будет иметь ровно i требований. В свою очередь, эта вероятность позволяет найти оценку математического ожидания ($M_{mp.z}$) числа требований в составе одной заявки.

Для ординарного потока интенсивность I определяет среднее число требований, поступающих в систему в единицу времени и одновременно – частоту их поступления. Для неординарного потока с той же интенсивностью I частота поступления групп требований (заявок) будет меньше, что определяет необходимость еще одной характеристики.

Параметром (λ) входного потока заявок называется среднее число заявок (групп требований), поступающих в систему в единицу времени (“частота” поступления (заявок) групп требований). Очевидно, что ($\lambda \leq I$).

Парциальным потоком заявок с параметром λ_i назовем часть общего входного потока, включающую поток заявок с количеством ровно i требований в одной заявке.

На практике оценка значений отмеченных характеристик входного потока может быть выполнена по результатам наблюдений за потоком и фиксации общего числа ($N_{mpб}$) требований, поступавших в систему обслуживания за время ($T_{нбл}$) наблюдений, а также числа заявок (N_i) в составе ровно i требований. Оценки можно выполнить по формулам:

$$I = \frac{N_{mpб}}{T_{нбл}}; \quad N_3 = \sum_{i=1}^L N_i; \quad a_i = \frac{N_i}{N_3}; \quad \lambda = \frac{N_3}{T_{нбл}}; \quad \lambda_i = \lambda \cdot a_i.$$

Между отмеченными характеристиками неординарного входного потока заявок (групп требований) возникают следующие взаимосвязи:

$$M_{mp.з} = \sum_{i=1}^L i \times a_i; \quad \lambda = \frac{I}{M_{mp.з}}; \quad \lambda_i = \lambda \times a_i; \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

4.3. Модель обслуживания групп требований $M_2/M/n$ с отказами (частный случай).

Ввиду сложности моделирования процессов обслуживания неординарного входного потока, сначала рассмотрим принцип получения аналитических выражений для финальных вероятностей на элементарном примере системы $M_2/M/n$ с отказами, то есть такой системы, в которой имеется n однотипных приборов, обслуживающих поток требований с параметром λ и включающий всего два парциальных потока заявок ($L=2$), а именно – парциальный поток заявок в составе ровно одного требования в заявке ($a_1 > 0$, $\lambda_1 = \lambda a_1$) и поток заявок в составе ровно двух требований в заявке ($a_2 > 0$, $\lambda_2 = \lambda a_2$). Граф модели процесса такой системы массового обслуживания приведен на рис. 2, где в случае поступления *одиночного* требования следует переход в *соседнее* состояние справа (см. на рис. 2 стрелки с обозначением частоты переходов λ_1), в случае поступления заявки в составе двух требований следует перескок вправо через одно состояние (см. на рис. 2 стрелки с обозначением частоты переходов λ_2).

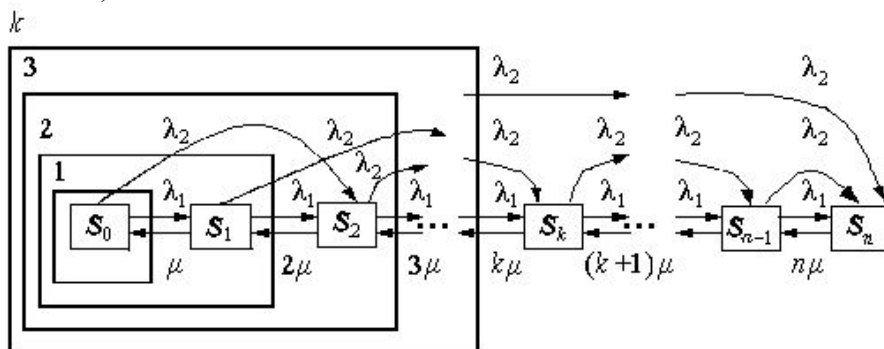


Рис. 2. Граф модели процесса системы массового обслуживания неординарного входного потока заявок ($M_2/M/n$)

Введем обозначения для коэффициентов ($\rho_i, i=1, 2$) загрузки системы частью входного потока заявок:

$$\rho_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}; \quad \rho_1 = \frac{\lambda_2}{\mu}. \quad (14)$$

Далее воспользуемся правилом баланса потоков переходов и составим уравнения баланса для контуров на графе модели (см. рис. 2), получим:

$$\left. \begin{aligned} 1\mu P_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2)P_0; \\ 2\mu P_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2)P_1 + \lambda_2 P_0; \\ 3\mu P_3 &= (\lambda_1 + \lambda_2)P_2 + \lambda_2 P_1; \\ \dots \\ k\mu P_k &= (\lambda_1 + \lambda_2)P_{k-1} + \lambda_2 P_{k-2}; \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} 1P_1 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} P_0; \\ 2P_2 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} P_1 + \frac{\lambda_2}{\mu} P_0; \\ 3P_3 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} P_2 + \frac{\lambda_2}{\mu} P_1; \\ \dots \\ kP_k &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} P_{k-1} + \frac{\lambda_2}{\mu} P_{k-2}. \end{aligned} \right\}$$

Учтем обозначения для коэффициентов загрузки и найдем:

$$P_1 = \rho_0 P_0; \quad 2P_2 = \rho_0 P_1 + \rho_1 P_0; \quad 3P_3 = \rho_0 P_2 + \rho_1 P_1; \dots \quad kP_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2}.$$

Таким образом, исходное уравнение, связывающее финальные вероятности модели, принимает вид:

$$kP_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2} \quad (15)$$

Для отыскания финальных вероятностей P_k предположим возможность будущей проверки корректности получаемых выражений, например путем сравнения с хорошо известными формулами Эрланга (1):

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad k=1, \dots, n; \quad \rho = \frac{\lambda_1}{\mu}. \quad (16)$$

С этой целью будем искать выражения для финальных вероятностей P_k в форме, близкой к формулам Эрланга, например в виде:

$$P_k = \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (17)$$

В этом случае все особенности неординарной структуры входного потока заявок должны быть сосредоточены в выражениях для функций (f_k), которые поэтому назовем функциями неординарности.

При вырождении входного потока в ординарный (в простейший) все функции неординарности должны оказаться равными единице и найденные формулы для финальных вероятностей автоматически должны преобразовываться в формулы Эрланга (16), что будет свидетельствовать в пользу корректности анализа рассматриваемого более общего случая обслуживания неординарного входного потока заявок.

При определении выражений для функций неординарности подставим формулы финальных вероятностей (17) в выражение (15), получим:

$$k \left(\frac{\rho_0^k}{k!} \right) P_0 f_k = \rho_0 \left(\frac{\rho_0^{k-1}}{(k-1)!} \right) P_0 f_{k-1} + \rho_1 \left(\frac{\rho_0^{k-2}}{(k-2)!} \right) P_0 f_{k-2}.$$

После приведения подобных членов получим удобное при быстрых расчетах рекуррентное выражение для определения значений функций неординарности (f_k), когда по известным значениям предыдущих функций находится значение следующей функции (при $L=2$):

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \cdot (k-1). \quad (18)$$

Выражение для вероятности нулевого состояния найдем с использованием условия нормировки вероятностей, в которое подставим формулы (17), получим:

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1; \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k = P_0 \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k \right) = 1; \rightarrow P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k \right)^{-1}.$$

Для определения значения самой первой функции неординарности (f_0) подставим в формулу (17) значение $k=0$, получим:

$$P_0 = P_0 \times f_0.$$

откуда следует равенство $f_0=1$. Значение функции неординарности (f_1) найдем из формулы (18) при значении $k=1$, получим:

$$f_1 = f_{1-1} + f_{1-2} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \times (1-1) = f_0. \quad (19)$$

Таким образом, при $L=2$ две первые функции неординарности оказались равными единице ($f_1=f_0=1$), что делает определенными аналитические выражения для всех искомым финальных вероятностей и позволяет считать поставленную задачу решенной. Однако, следует отметить, что в данном случае последнее состояние системы обслуживания не является единственным для возникновения отказа в обслуживании требований. Поэтому вероятность обслуживания следует искать с применением выражения для математического ожидания числа занятых каналов обслуживания ($M_{зк}$) и абсолютной пропускной способности (A) системы:

$$M_{зк} = \sum_{k=0}^n k P_k; \quad A = \mu M_{зк}; \quad P_{обс} = q = \frac{A}{I}; \quad P_{отк} = 1 - P_{обс}.$$

Отметим, что при ($L=3$) для системы $M_3/M/n$ с отказами входной поток требований с параметром λ будет включать три парциальных потока заявок с параметрами ($\lambda_1 = \lambda a_1, \lambda_2 = \lambda a_2, \lambda_3 = \lambda a_3$). На графе модели процесса (см. рис. 2) из каждого состояния вправо будут выходить уже не две, а три дуги и в правой части общего уравнения (15) появится третье слагаемое:

$$k P_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2} + \rho_2 P_{k-3},$$

где $\rho_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\mu}; \quad \rho_1 = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\mu}; \quad \rho_2 = \frac{\lambda_3}{\mu},$

что приведет к появлению третьего слагаемого и в уравнении (18):

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} (k-1) + f_{k-3} \frac{\rho_2}{\rho_0^3} (k-1)(k-2).$$

При этом для новой ситуации ($L=3$) множители $(k-1)$ автоматически обеспечат равенство единице двух первых функций ($f_1=f_0=1$) неординарности. Для третьей функции полагаем $k=2$ и из общей формулы находим:

$$f_2 = f_1 + f_0 \frac{\rho_1}{\rho_0^2} + f_{-1} \frac{\rho_2}{\rho_0^3} (2-1)(2-2) = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0^2}; \rightarrow f_2 = 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0^2}.$$

Выражения для последующих функций ($f_k, k > 2$) неординарности становятся громоздкими, что делает их аналитическую запись нецелесообразной, а рекуррентное представление функций неординарности – достаточным для выполнения расчетов.

4.4. Проверка корректности решения

Для проверки корректности полученного решения найдем выражения функций неординарности (f_k) при вырождении неординарного входного потока требований в простейший. В этом случае параметр парциального потока заявок на обслуживание сразу двух требований оказывается равным нулю ($\lambda_2 = 0$). Тогда из формул (14) и (16) следует ($\rho_1 = 0; \rho_0 = \rho$). Подставляя значение $\rho_1 = 0$ в формулу (18), с учетом равенства ($f_0 = 1$), находим, что второе слагаемое обращается в ноль и формула (18) принимает вид:

$$f_k = f_{k-1} = 1; \quad k = 1, \dots, n.$$

В итоге выражение (17) для финальных вероятностей P_k преобразуется в хорошо известные формулы Эрланга (16), что свидетельствует в пользу корректности проведенного анализа и полученных выражений (17) финальных вероятностей для более общего случая обслуживания неординарного входного потока требований частной структуры.

4.5. Модель обслуживания групп требований $M_L/M/n$ с отказами (общий случай)

В такой системе имеется n однотипных приборов, обслуживающих поток групп требований с параметром потока (“частотой” появления групп) λ . Общий поток включает L парциальных потоков заявок с параметрами ($\lambda_1 = \lambda a_1, \lambda_2 = \lambda a_2, \dots, \lambda_L = \lambda a_L$). Напомним, заявки в каждом парциальном потоке содержат ровно i требований ($i = 1, \dots, L$) в каждой заявке. Для определенности общего случая модели будем считать, что $L \geq n$. При этом для реального потока с иным составом достаточно положить равными нулю вероятности ($a_i = 0$) появления заявок в составе ровно i требований, если такие заявки в потоке отсутствуют.

Обозначим символом S_k ($0 \leq k \leq n$) состояние в котором заняты ровно k каналов и построим граф модели процесса в такой системе обслуживания (см. рис. 3). На графе модели в случае поступления одиночного требования следует подключение еще одного канала обслуживания и переход в соседнее состояние справа (см. на рис. 3 стрелки с обозначением частоты переходов λ_1). В случае поступления заявки с большим числом ($i > 1$) требований следует подключение сразу еще i каналов обслуживания и перескок вправо через $(i - 1)$ состояний (см. на рис. 3 стрелки с обозначением частоты $\Sigma \lambda_i$), если в системе есть достаточное количество свободных каналов обслуживания. В случае недостатка свободных каналов следует переход в последнее состояние S_n , при этом часть требований в заявке, для которых не окажется свободных каналов обслуживания, получают отказ и покинут систему не обслуженными.

Суммарная интенсивность потока обслуживания (число обслуживаемых требований в единицу времени) для каждого состояния определяется количеством каналов, занятых в этом состоянии. Так, если занят обслуживанием один канал (состояние S_1), то интенсивность обслуживания равна производительности одного канала (μ), если заняты обслуживанием ровно k каналов (состояние S_k), то интенсивность обслуживания будет в k раз больше и составит величину $(k\mu)$.

На графе модели (рис. 2.11) возможен пошаговый переход из одного состояния в любое другое состояние за конечное число шагов. Поэтому при постоянных интенсивностях переходов в системе обслуживания возможно установление стационарного режима.

Задача заключается в определении аналитических выражений для финальных вероятностей P_k ($0 \leq k \leq n$) состояний S_k , которые (вероятности) являются исчерпывающей характеристикой процесса обслуживания и позволяют получить оценки всех показателей эффективности процесса.

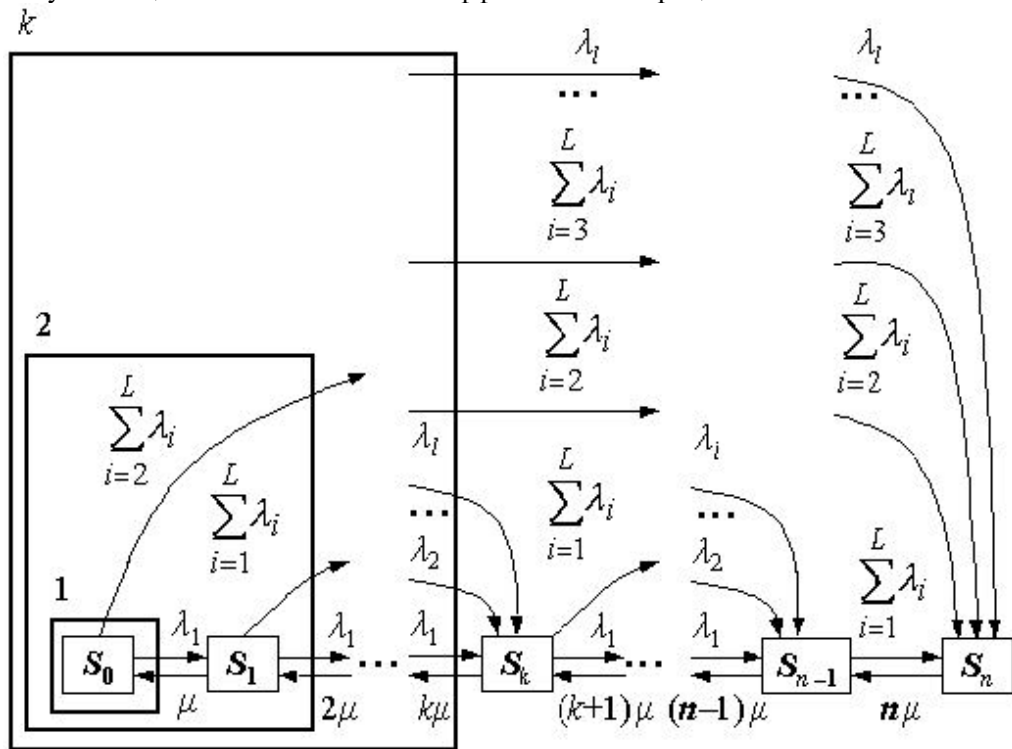


Рис.3. Граф модели обслуживания неординарного входного потока требований

Решение. Будем искать выражения для финальных вероятностей P_k , как и ранее, в форме, близкой к формулам Эрланга, а именно в виде:

$$P_k = \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k, \quad 0 \leq k \leq n. \tag{20}$$

В этом случае все особенности неординарной структуры входного потока заявок должны быть сосредоточены в выражениях для функций

неординарности (f_k). При вырождении входного потока в ординарный (в простейший) все функции неординарности должны оказаться равными единице и найденные формулы финальных вероятностей автоматически должны преобразовываться в формулы Эрланга (16), что будет свидетельствовать в пользу корректности анализа рассматриваемого более общего случая – обслуживания неординарного входного потока заявок.

Введем обозначения для коэффициентов ($\rho_i, 0 \leq i < L$) загрузки системы частью входного потока заявок, в которой (в части потока) отсутствуют первые i парциальных потоков заявок:

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1+i}^L \lambda_j, & \text{при } 0 \leq i < L; \\ 0, & \text{при } i \geq L. \end{cases} \quad (21)$$

Воспользуемся правилом баланса потоков переходов и составим уравнения баланса для контуров на графе модели (см. рис. 3), получим:

$$\left. \begin{aligned} 1\mu P_1 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_0; \\ 2\mu P_2 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_1 + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_0; \\ 3\mu P_3 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_2 + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_1 + \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_0; \\ &\dots \\ k\mu P_k &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_{k-1} + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_{k-2} + \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_{k-3} + \dots + \left(\sum_{i=k}^L \lambda_i \right) P_0. \end{aligned} \right\}$$

Последовательность уравнений позволяет установить закономерность их формирования: в правой части *количество* слагаемых совпадает с индексом k финальной вероятности, стоящей в левой части равенства; индекс финальной вероятности в каждом слагаемом в правой части уменьшается относительно индекса k на величину (α) номера слагаемого (в первом слагаемом – на $\alpha = 1$, во втором – на $\alpha = 2$ и т. д.). Эта же величина α является нижней границей суммы параметров парциальных потоков групп требований ($\sum \lambda_i$) для каждой из упомянутых вероятностей. Поэтому далее будем оперировать уравнением для общего случая k -го контура на графе модели (см. последнее уравнение для вероятности P_k). Разделим левую и правую части k -го уравнения на величину производительности μ , получим:

$$kP_k = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_{k-1} + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_{k-2} + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_{k-3} + \dots + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=k}^L \lambda_i \right) P_0.$$

Затем воспользуемся коэффициентами ($\rho_i, 0 \leq i < L$) загрузки системы частью входного потока заявок и найдем уравнение для общего случая:

$$kP_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2} + \rho_2 P_{k-3} + \dots + \rho_{k-1} P_0. \quad (22)$$

Напомним, что правая часть уравнения (22) “удлиняется” или “укорачивается” автоматически в зависимости от значений индекса k в силу того, что для $i < 0$ состояния S_i отсутствуют и вероятности $P_i = 0$.

Подставим формулы (20) для финальных вероятностей P_k , в уравнение (22). Третье слагаемое в правой части использовалось для иллюстрации закономерности изменения слагаемых, далее в целях краткости записи третье слагаемое в правой части опустим, получим:

$$k \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 \cdot f_k = \rho_0 \frac{\rho_0^{k-1}}{(k-1)!} P_0 f_{k-1} + \rho_1 \frac{\rho_0^{k-2}}{(k-2)!} P_0 f_{k-2} + \dots + \rho_{k-1} \cdot (1) \cdot P_0 f_0.$$

Затем разделим обе части равенства на множитель, стоящий в левой части равенства перед функцией неординарности (f_k), для наглядности учтем отброшенное третье слагаемое в правой части равенства, выполним операции, аналогичные приведенным в формулах (18, 19), получим:

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} (k-1) + f_{k-3} \frac{\rho_2}{\rho_0^3} (k-1)(k-2) + \dots + f_0 \frac{\rho_{k-1}}{\rho_0^k} (k-1)\dots(1).$$

В последнем слагаемом перемножается последовательность из $(k-1)$ чисел, каждое из которых меньше предыдущего на единицу, последнее число оказывается равным единице. Найденное выражение является рекуррентным, удобным для быстрых численных расчетов и может быть представлено более компактно:

$$f_k = f_{k-1} + \sum_{i=2}^k \left[f_{k-i} \frac{\rho_{i-1}}{\rho_0^i} \prod_{j=1}^{i-1} (k-j) \right], \quad k = 2, \dots, n. \quad (23)$$

Явные аналитические выражения функций неординарности из формулы (23) получить можно, но их запись бесполезна в силу громоздкости.

Выражение для вероятности нулевого состояния найдем с использованием условия нормировки вероятностей, в которое подставим формулы (20), получим:

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1; \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k = P_0 \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k \right) = 1; \rightarrow P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k \right)^{-1}$$

Для определения значения самой первой функции неординарности (f_0) подставим в формулу (20) значение $k=0$, получим:

$$P_0 = P_0 \times f_0,$$

откуда следует равенство $f_0 = 1$. Значение функции неординарности (f_1) найдем из формулы (23) при значении $k=1$. Как и в случае формулы (19), получим:

$$f_1 = f_{1-1} + \sum_{i=2}^1 \left[f_{1-i} \frac{\rho_{i-1}}{\rho_0^i} \prod_{j=1}^{i-1} (1-j) \right] = f_0 + [0] = f_0.$$

Таким образом, две первые функции неординарности оказались равными единице ($f_1 = f_0 = 1$), что делает определенными аналитические выражения для всех искомым финальных вероятностей и позволяет считать поставленную задачу решенной. Отметим, что в данном случае “отказовыми” являются все последние $(L-1)$ состояний системы массового обслуживания, так как появление заявки в составе L требований для этих состояний приведет к обязательному отказу в обслуживании какой-то части требований в этой заявке. Поэтому вероятность обслуживания следует искать с применением выражения для математического ожидания числа занятых каналов обслуживания ($M_{зк}$) и абсолютной пропускной способности (A) системы:

$$M_{зк} = \sum_{k=0}^n kP_k; \quad A = \mu \cdot M_{зк}; \quad P_{обс} = q = \frac{A}{I}; \quad P_{отк} = 1 - P_{обс}.$$

4.6. Проверка корректности аналитического описания модели

Проверку корректности полученного решения выполним также как и раньше – найдем выражения функций неординарности (f_k) при вырождении неординарного входного потока требований в простейший. В этом случае параметры парциальных потоков заявок на обслуживание сразу двух и более требований оказываются равными нулю ($\lambda_i=0, i > 1$). Тогда из формулы (21) следует ($\rho_0=\rho; \rho_i=0, i > 0$). Подставляя значение ($\rho_i=0, i > 0$) в формулу (23), с учетом равенства ($f_0=1$), находим, что второе слагаемое обращается в ноль и формула (23) принимает вид:

$$f_k = f_{k-1} = 1; \quad k=1, \dots, n.$$

В итоге выражение (20) для финальных вероятностей P_k преобразуется в хорошо известные формулы Эрланга (16), что свидетельствует в пользу корректности проведенного анализа, полученных выражений (20) финальных вероятностей и выражения (23) функций неординарности для общего случая обслуживания неординарного входного потока требований.

Задача решена.

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Доказанная в тексте теорема фактически является инструментом графического преобразования системы дифференциальных уравнений Чепмена-Колмогорова и соответствующих им алгебраических уравнений, что освобождает исследователя от кропотливых операций в ходе получения аналитического описания моделей и открывает возможности исследования процессов существенно более сложных, чем те, которые известны в классических марковских системах массового обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / Под ред. Б. В. Гнеденко. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.
3. Шахбазов А. Обслуживание неординарного потока // Докл. АН СССР. – т. 145 – №2.