

Об одной вероятностной модели тепловых режимов радиоаппаратуры

Л. В. Климова, А. Ю. Петрова, М. А. Проценко, Н. В. Черемская

ГП Научно-исследовательский технологический институт приборостроения, Украина

Харьковский гуманитарный университет «Народная украинская академия», Украина

ГП Научно-исследовательский технологический институт приборостроения, Украина

Харьковский национальный технический университет «ХПИ», Украина

The representation for correlation function of the solution of a thermal conduction equation describing thermal mode in a final length rod which is under effect of exterior statistically non-stationary sources is obtained. The numerical analysis of a dispersion depending on spatial coordinate and time is given. The obtained results can be used at calculation of thermal modes of radio equipment which is under effect of exterior non-stationary fluctuations.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При работе радиоаппаратуры, входящей в системы космических аппаратов (КА), в космическом пространстве часто возникают температурные флуктуации, из-за нагрева поверхности КА и солнечных батарей за счет взаимодействия с космической средой, нагрева от излучения Солнца, планет и работающих двигателей [1]. При отсутствии солнечных лучей температура КА резко понижается. Смена процесса переохлаждения процессом нагрева от солнечного излучения приводит к тому, что конструкции и аппаратура, размещаемые на внешней поверхности КА, подвергаются циклическому воздействию температур, что представляет опасность для материалов и изделий, входящих в состав аппаратуры и солнечных батарей. Повышение температуры вызывает ухудшение изоляционных свойств материалов, изменение плотности и подвижности носителей заряда в полупроводниках, снижение индуктивности насыщения в сердечниках, общее увеличение интенсивности старения материалов и т. п. Все эти факторы могут привести к искажению сигналов на выходе аппарата или даже к выходу изделия из строя.

Следовательно, для обеспечения нормального теплового режима аппаратуры и определения характеристик системы терморегулирования необходимо проводить тепловое проектирование приборов.

При работе радиоаппаратуры систем КА в космическом пространстве также возникают и неконтролируемые температурные флуктуации, связанные, в частности, с нестационарными неконтролируемыми процессами, происходящими на Солнце, попаданием космических объектов в облака космических частиц плазмы солнечного ветра и т. д., которые чаще всего происходят на конечном интервале времени и локализованы в пространстве, и поэтому, в принципе не могут быть смоделированы стационарными случайными процессами или однородными случайными полями.

Поэтому возникает необходимость в расчетах тепловых режимов, которые носят статистически нестационарный или неоднородный характер.

2. Постановки задачи

Интерес представляет следующий случай: температура среды, окружающей или протекающей через аппарат, изменяется во времени; необходимо определить нестационарное температурное поле аппарата.

Рассмотрим следующую стохастическую задачу распространения тепла в конечном тонком стержне:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \\ U|_{t=0} = f_0(x), \\ U|_{x=0} = U|_{x=\ell} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где U – преобразованная температура; t – время, a – коэффициент теплопроводности; $f(x)$ – плотность тепловых источников.

3. Решение

Пусть $f(x,t)$ имеет вид $f(x,t) = f_0(x)\xi(t)$, где $\xi(t)$ – случайный процесс, $M\xi(t) = 0$ и корреляционная функция (КФ) $\xi(t)$ задана. Тогда, представляя решение (1) в виде $U = U_1 + U_2$, где U_1 – решение задачи с $f(x,t) \equiv 0$, а U_2 соответственно с $f_0(x) \equiv 0$, и, используя разложение решения задачи (1) по соответствующим собственным функциям, для КФ U_2 имеем (2):

$$K_{U_2}(x, y, t, s) = \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^t \int_0^s G(x, x_1, t - \tau_1) G(y, y_1, s - \tau_2) K_{\xi\xi}(\tau_1, \tau_2) \overline{f_0(x_1) f_0(y_1)} dx_1 dy_1 d\tau_1 d\tau_2,$$

где функция Грина $G(x, y, t - \tau) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^\infty e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi y}{\ell}$, $\omega_n^2 = a \left(\frac{\pi n}{\ell} \right)^2$.

В случае, когда температурные неоднородности, описываемые $f(x,t)$, локализованы в пространстве, то есть $f_0(x) = f_0 \cdot \delta(x - x_0)$, $0 \leq x_0 \leq \ell$, для КФ U_2 получаем представление:

$$K_{U_2}(x, y, t, s) = f_0 \int_0^t \int_0^s G(x, x_0, t - \tau_1) G(y, x_0, s - \tau_2) K_{\xi\xi}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3)$$

Отметим, что температурные флуктуации большей частью носят статистически нестационарный характер, поэтому для $K_{\xi\xi}(\tau_1, \tau_2)$ можно использовать те представления, которые получены в [2]. В частности, в случае когда временной дискретный спектр случайного возмущения расположен в верхней комплексной полуплоскости, что соответствует асимптотическому затуханию случайных возмущений, выражение для КФ (3) принимает вид:

$$K_{U_2}(x, y, t, s) = f_0 \int_0^{\infty} \Phi(x, t, \tau) \overline{\Phi(y, s, \tau)} d\tau, \quad (4)$$

где $\Phi(x, t, \tau) = \int_0^t G(x, x_0, t - \tau_1) \varphi(\tau_1 + \tau) d\tau_1$, а $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \Lambda_k(t)$,

$$\Lambda_k(t) = \sum_{j=1}^k c_{kj} e^{i\lambda_j t}, \quad \lambda_k = \alpha_k + i \frac{\beta_k^2}{2}, \quad \text{в случае, когда } \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j.$$

Представление (4) является исходным для конкретных расчетов. В случае, когда все λ_j различны, то для $K_{U_2}(x, y, t, s)$ имеем

$$\begin{aligned} K_{U_2}(x, y, t, s) &= f_0 \frac{4}{\ell} \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \sum_{j=1}^k c_{kj} \frac{e^{i\lambda_j t} - e^{-\omega_n^2 t}}{\omega_n^2 + i\lambda_j} \right] \times \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi y}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \sum_{j=1}^k c_{kj} \frac{e^{-i\bar{\lambda}_j s} - e^{-\omega_n^2 s}}{\omega_n^2 + i\lambda_j} \right] \cdot e^{i\lambda_j t - i\bar{\lambda}_j s} d\tau = \\ &= f_0 \frac{4}{\ell} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \sum_{j=1}^k c_{kj} \frac{e^{i\lambda_j t} - e^{-\omega_n^2 t}}{\omega_n^2 + i\lambda_j} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi y}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \sum_{k=1}^{N \leq \infty} d_k \sum_{j=1}^k c_{kj} \frac{e^{-i\bar{\lambda}_j s} - e^{-\omega_n^2 s}}{\omega_n^2 + i\lambda_j} \cdot \frac{1}{\beta_j^2}. \end{aligned}$$

Если $n=1, N=1, j=1$, то

$$K_{U_2}(x, y, t, s) = \frac{4f_0}{\ell^2} \cdot \frac{d_1^2 c_{11}^2}{|\omega_1^2 + i\lambda_1|^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot (e^{i\lambda_1 t} - e^{-\omega_1^2 t}) \cdot \frac{e^{-i\bar{\lambda}_1 s} - e^{-\omega_1^2 s}}{\beta_1^2}.$$

Отсюда могут быть получены представления для КФ вида: $K_{U_2}(x, y, t, t)$, $K_{U_2}(x, x, t, s)$ и $K_{U_2}(x, x, t, t)$. Выпишем $\text{Re } K_{U_2}$ в каждом случае:

$$\text{Re } K_{U_2}(x, y, t, t) =$$

$$= \frac{4f_0}{\ell^2} \cdot \frac{d_1^2 c_{11}^2}{|\omega_1^2 + i\lambda_1|^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{\ell} \sin \frac{\pi y}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{e^{-2\omega_1^2 t} + e^{-\beta_1^2 t} - 2e^{-\beta_1^2 t/2 - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 t}{\beta_1^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Re } K_{U_2}(x, x, t, s) &= \frac{4f_0}{\ell^2} \cdot \frac{d_1^2 c_{11}^2}{|\omega_1^2 + i\lambda_1|^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{1}{\beta_1^2} \left(e^{-\beta_1^2 \frac{t+s}{2}} \cos \alpha_1(t-s) - \right. \\ &\left. - e^{-\beta_1^2 \frac{t}{2} - \omega_1^2 s} \cos \alpha_1 t - e^{-\beta_1^2 \frac{s}{2} - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 s + e^{-\omega_1^2 (t+s)} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Re } K_{U_2}(x, x, t, t) = \frac{4f_0 d_1^2 c_{11}^2}{\ell^2 |\omega_1^2 + i\lambda_1|^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{e^{-2\omega_1^2 t} + e^{-\beta_1^2 t} - 2e^{-\beta_1^2 t/2 - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 t}{\beta_1^2}.$$

Рассмотрим кратко «сильную» нестационарность у $\xi(t)$, когда спектр состоит из одной точки $\lambda = 0$, однако бесконечной кратности.

В этом случае $\varphi(t) = \int_0^p q_0(v) J_0(\sqrt{2tv}) dv$, где $J_0(x)$ – соответствующая функция Бесселя [3]. Если $q_0(v) = q_0 \delta(v - v_0)$, $0 \leq v_0 \leq p$, $\varphi(t)$ принимает вид $\varphi(t) = \int_0^p q_0(v) J_0(\sqrt{2tv}) dv$, и для $\Phi(x, t, \tau)$ из (4) имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, \tau) &= \int_0^t G(x, x_0, t - \tau_1) \varphi(\tau_1 + \tau) d\tau_1 = \\ &= \frac{2q_0}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x_0}{\ell} \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau_1)} J_0(\sqrt{2v_0(\tau_1 + \tau)}) d\tau_1. \end{aligned}$$

Дальнейшее изучение этого случая связано с численным интегрированием интеграла $\int_0^t e^{\omega_n^2 \tau_1} J_0(\sqrt{2v_0(\tau_1 + \tau)}) d\tau_1$.

Аналогично можно исследовать случайный тепловой режим прямоугольной пластины и области в виде круга (меняется выражение для функции Грина).

Рассмотрим теперь кратко случай, когда свойства среды меняются случайным образом с течением времени. При этом флуктуации коэффициента температуропроводности представляют собой случайный процесс. В результате приходим к следующей начальной краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} &= \xi(t) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \\ \begin{cases} U|_{t=0} = U_0(x), \\ U|_{x=0} = U|_{x=\ell} = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что если краевые условия неоднородные, то заменой $U(x, t)$ они сводятся к однородным.

Пусть $\xi(t)$ – случайный марковский дихотомический процесс, принимающий два значения $\xi(t) = \begin{bmatrix} k_1, \\ k_2. \end{bmatrix}$ Введем марковский дихотомический процесс

$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 1, \\ -1. \end{bmatrix}$ Следовательно, $\xi(t) = \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 - k_2}{2} \alpha(t)$. Тогда (5) принимает

вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k_1 + k_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{k_1 - k_2}{2} \alpha(t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Отметим, что задача нахождения дисперсии решения уравнения (6) сводится к аналогичной задаче, если уравнение (6) переписать в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \xi(t) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = V(x,t), \end{cases} \quad (7)$$

и, используя тот факт, что $V(x,t)$ удовлетворяет снова уравнению (6), можно получить для $V_1 = U^2$, $V_2 = UV$, $V_3 = V^2$ систему

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial t} = 2\xi(t) \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - V_3 \right), \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} = \xi(t) \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} = 2V_2. \end{cases}$$

4. Вычислительный эксперимент

На рис.1 дан график функции $\sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{e^{-2\omega_1^2 t} + e^{-\beta_1^2 t} - 2e^{-\beta_1^2 t/2 - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 t}{\beta_1^2}$

при условиях $\{ \ell = 6 \div 15, \beta_1 = 1, \alpha_1 = 1, a = 0,41 \cdot 10^{-6}, x = x_0 = 5 \}$ [5].

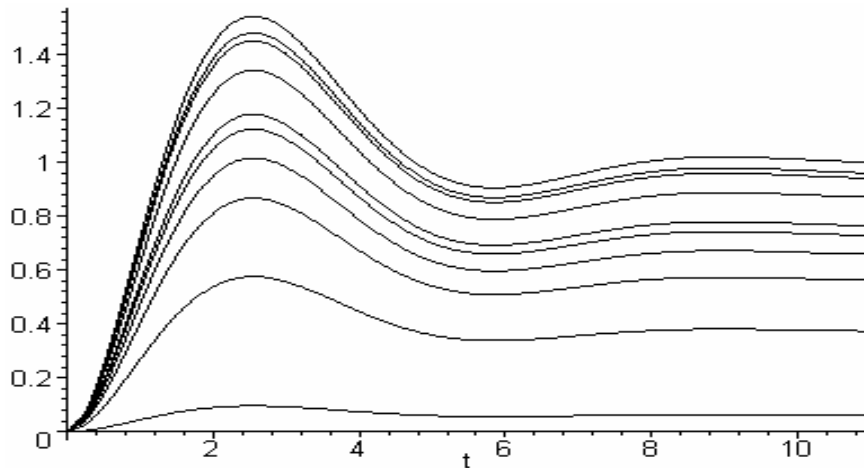


Рис. 1

На рис.2 дан график функции $\sin^2 \frac{\pi x}{\ell} \sin^2 \frac{\pi x_0}{\ell} \cdot \frac{e^{-2\omega_1^2 t} + e^{-\beta_1^2 t} - 2e^{-\beta_1^2 t/2 - \omega_1^2 t} \cos \alpha_1 t}{\beta_1^2}$,

при условиях $\{ \ell = 3 \div 10, \beta_1 = 1, \alpha_1 = 1, a = 97,5 \cdot 10^{-6}, x = x_0 = 2 \}$ [5].

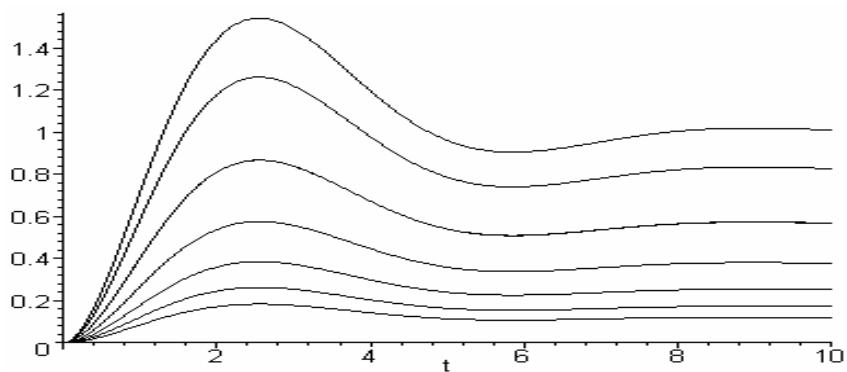


Рис. 2

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Исследованы тепловые режимы с целью определения общих закономерностей управления пространственно-временным изменением температурного поля в сложной системе при учете влияния различных конструктивных и физических параметров.

Получено представление для корреляционной функции решения нестационарных уравнения теплопроводности для стержня конечной длины, находящегося под воздействием внешних статистически нестационарных источников.

Аналогичное представление для корреляционной функции можно получить для элементов радиоаппаратуры, имеющей форму прямоугольника или шайбы, и используя спектральные разложения нестационарных случайных процессов, получить спектральное представление решения, соответствующее начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности.

Анализ тепловых режимов различных радиоэлектронных аппаратов будет использован в процессе проектирования для выбора оптимальной системы их охлаждения и размещения определенным образом отдельных частей аппарата относительно друг друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинский В. Д. Испытания аппаратуры и средств измерений на воздействие внешних факторов: Справочник / В. Д. Малинский, В. Х. Бергларян, Л. Г. Дубицкий // Под ред. В. Д. Малинского – М.: Машиностроение, 1993. – 576 с.
2. Петрова А. Ю. Корреляционные функции и квазидетерминированные сигналы / А. Ю. Петрова, В. А. Фадеев, Н. В. Черемская // Вестник ХНУ. – Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – № 703, 2005. – С. 172–177.
3. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовом пространстве. – Харьков, 1971. – 160 с.
4. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Динамические системы при случайных воздействиях. Простые средства анализа. – Новосибирск: Наука, 1983. – 160 с.
5. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи / Пер с англ. Н. А. Анфимова. – М.: Мир, 1983. – 512 с.