

## Численный анализ спектра открытого цилиндрического резонатора конечной высоты

И. В. Митина

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

Two approaches to the numerical analysis of the finite-size open cylindrical resonators are suggested in the paper. The analysis of connection with the two-dimensional problem is performed. The results of numerical experiments illustrating possibilities of the methods are obtained.

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

В рамках проекта УТС (управляемый термоядерный синтез) — ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) предлагается использовать гиротроны для нагрева плазмы в установках с магнитным удержанием. Численный расчет спектров резонаторов, которые являются основной составляющей гиротрона, позволит спроектировать их конструкцию так, чтобы обеспечить требуемую мощность генерируемых электромагнитных волн в заданном диапазоне частот.

### 2. Истоки исследования и нерешенные проблемы

Традиционные гиротроны с резонатором в виде цилиндрического волновода не могут обеспечить хороших селективных качеств, при генерации сигнала высокой мощности. Поэтому, для подавления паразитных мод необходимо использовать более сложные геометрии [1]. В частности предлагается конструкция резонатора из двух коаксиальных проводников, причем на внутренний проводник нанесены прямоугольные гофры. На конкуренцию мод в таком случае можно влиять, изменяя линейные размеры гофра (высота и ширина), а также соотношение радиусов внешнего и внутреннего проводника. Численно аналитический метод спектрального анализа такого резонатора предложен в [2]. Метод, обладая несомненными вычислительными достоинствами, оказывается ограничен именно такой геометрией резонатора.

### 3. Цели работы

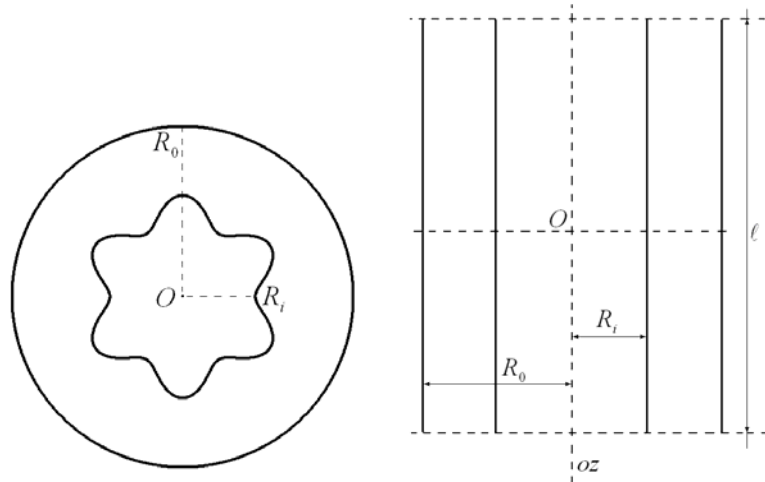
В данной работе предлагается общий подход к спектральному анализу открытых коаксиальных цилиндрических резонаторов конечной высоты с гофрами произвольной формы. Единственным требованием является достаточная гладкость границ таких резонаторов.

### 4. Постановка задачи

Рассматривается квазистационарная задача дифракции “первичного” поля  $E_0(x, t) = E_0(x) \cdot e^{-i\omega t}$  в вакууме на гладкой идеально проводящей поверхности  $S$ . “Рассеиватель”  $S$  (в дальнейшем называемый резонатором) представляет

собой цилиндрическую структуру из двух коаксиальных идеальных проводников. Продольное и поперечное сечения изображены на рисунке 1.

Выберем цилиндрическую систему координат с началом  $O$  и осью  $oz$  как показано на рисунке. Тогда радиус внутреннего проводника как функция цилиндрического угла  $\varphi$  запишется в виде  $R_i = R_1 + 0.5d \cdot \sin(N\varphi)$ , где  $N$  — число гофр на внутреннем проводнике,  $d$  — высота гофра. Высота резонатора определяется параметром  $\ell$ .



а) поперечное сечение при  $N = 6$       б) продольное сечение

Рис.1. Сечения резонатора

В работе [3] искомое возмущение электрического поля  $E_1(x)$ , являющееся решением такой краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta E_1(x) + p^2 E_1(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \quad p = \omega / c \\ (\nabla, E_1(x)) = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \\ E_1(x) \times n(x) = -E_0(x) \times n(x), & x \in S \\ E_1(x) = \frac{e^{ip|x|}}{|x|} \left( C_0 \left( \frac{x}{|x|} \right) + O\left( \frac{1}{|x|} \right) \right), & |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

предлагается искать в виде

$$E_1(x) = \nabla \times A(x), \quad (4.2)$$

где

$$A(x) = \int_S \left[ j(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} - Kj(y) \right] \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} dS_y$$

Здесь  $j(y) = j_1(y)\tau_1(y) + j_2(y)\tau_2(y)$ ,  $Kj(y) = k_1(y)j_1(y)\tau_1(y) + k_2(y)j_2(y)\tau_2(y)$ ,  $\tau_i(y)$  — орт главного направления, отвечающего главной кривизне  $k_i(y)$  поверхности  $S$  в точке  $y$ ,  $n(x)$  — внешняя нормаль к  $S$ ,  $c$  — скорость света в вакууме.

Поле (4.2) автоматически удовлетворяет всем условиям краевой задачи (4.1) кроме третьего. Третье условие порождает псевдодифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^2 \int_S^* j_i(y) A_{ki}(x, y) dS_y = F_k(x), \quad x \in S, \quad k=1,2, \quad (4.3)$$

где правая часть  $F_k(x) = -(E_0(x) \times n(x), \tau_k(x))$ , а ядро

$$A_{ki}(x, y) = \left\{ (\tau_i(y), \tau_k(x)) \left[ \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} - k_i(y) \frac{\partial}{\partial n(x)} \right] - (n(x), \tau_i(y)) \left[ \frac{\partial^2}{\partial \tau_k(x) \partial n(y)} - k_i(y) \frac{\partial}{\partial \tau_k(x)} \right] \right\} \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|}.$$

Символ  $\int^*$  означает предельное значение интеграла при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , если в выражении  $e^{ip|x-y|}/|x-y|$  заменить  $x \rightarrow x_\varepsilon = x + \varepsilon n(x)$ .

### 5. Формулировка спектральной задачи

Свойства открытого резонатора определяются функцией  $C_0(x/|x|, p)$  из (4.1), поскольку плотность потока энергии, рассеиваемой в направлении  $q = x/|x|$ , пропорциональна  $|C_0(q, p)|^2$ . Полная энергия, рассеиваемая резонатором в единицу времени, называется спектральной мощностью излучения и определяется по формуле

$$N(p) = \int_{|q|=1} |C_0(q, p)|^2 dS_q$$

Частоты  $\omega = pc$ , отвечающие локальным максимумам функции  $N(p)$ , называются резонансными.

### 6. Квазипериодичность

Исследуемый резонатор обладает свойством симметрии, связанным с идентичностью гофр на внутреннем проводнике. А именно  $P_\alpha S = S$ , где  $P_\alpha$  — оператор поворота вокруг оси  $oz$  на угол  $\alpha = 2\pi/N$  против часовой стрелки. Введем унитарный оператор  $T$ , действие которого на вектор-функции задается равенством  $TE(r, \varphi, z) = P_{-\alpha} E(r, \varphi + \alpha, z)$ . Собственными числами оператора  $T$  будут  $\lambda_m = e^{im\alpha}$ ,  $m = 0, \dots, N-1$ . Можно показать что

$$I = \sum_{m=0}^{N-1} N_m^T,$$

где

$$N_m^T = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} (T - \lambda_k I)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} (\lambda_m - \lambda_k)}$$

— оператор проектирования на собственное подпространство оператора  $T$ , отвечающее собственному значению  $\lambda_m$ ,  $I$  — единичный оператор.

Это позволяет решение исходной задачи разбить на отдельные моды с номерами  $m = 0, \dots, N-1$ . Для моды с номером  $m$  решение уравнения (4.3) ищется в виде собственной функции оператора  $T$ :  $Tj^m(y) = \lambda_m j^m(y)$ , что дает для компонент решения свойство квазипериодичности  $j_i^m(r, \varphi + \alpha, z) = \lambda_m j_i^m(r, \varphi, z)$ ,  $i = 1, 2$ . Правая часть  $F_k^m(x) = -(N_m^T[E_0(x), n(x)], \tau_k(x))$  также удовлетворяет этому условию. Далее мы будем работать с  $m$ -ой модой, но сам индекс у решения и правой части для краткости будем опускать.

### 7. Переход к одномерным интегральным уравнениям с сильной особенностью

Поскольку поверхность  $S$  — цилиндрична, то возможны два варианта преобразования СИУ (4.3), связанные с построением гиперсингулярных интегральных уравнений по замкнутым кривым поперечного сечения или по отрезку прямой в продольном сечении. В этой работе будет предложен некий вариант обоих подходов.

#### 8. Первый подход — гиперсингулярные уравнения на отрезке

Поверхность  $S$  состоит из двух кусков  $S = S_0 \cup S_1$ , где  $S_0$  — внешний проводник, а  $S_1$  — внутренний гофрированный. Обозначим символом  $g_y$  номер поверхности, на которой лежит точка  $y$ . Уравнение (4.3) перепишем в виде

$$\sum_{g_y=0}^1 \sum_{i=1}^2 \int_{S_{g_y}}^* j_i^{g_y}(y) \cdot A_{ki}^{g_x g_y}(x, y) dS_y = F_k^{g_x}(x), \quad x \in S_{g_x}, \quad k = 1, 2, g = 0, 1. \quad (8.1)$$

Точки на поверхности  $S$  задаются векторным полем  $x = \hat{x} + aze_3$ , где  $\hat{x} = r(\varphi) \cos(\varphi)e_1 + r(\varphi) \sin(\varphi)e_2$  — проекция на плоскость поперечного сечения,  $a = \ell/2$  — полувысота,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [-1, 1]$ . Для поверхностных координат точки  $x$  будем использовать обозначение  $(\varphi, z)$ , точки  $y$  —  $(\psi, \zeta)$ . Далее, переходя к двойным интегралам в (8.1), множитель  $|\hat{y}'_\psi(\psi)|$  из  $dS_y$  будем присоединять к решению  $j(y)$ .

Воспользуемся Фурье представлением для квазипериодической функции и заменим с достаточной степенью точности

$$j_i^{g_y}(\psi, \zeta) \approx \sum_{n=-n_{g_y}}^{n_{g_y}} j_{in}^{g_y}(\zeta) \cdot e^{i(m+nN)\psi}, \quad (8.2)$$

$$F_k^{g_x}(\varphi, z) \approx \sum_{f=-n_{g_x}}^{n_{g_x}} F_{kf}^{g_x}(z) \cdot e^{i(m+fN)\varphi}.$$

Домножим обе части равенства (8.1) на  $e^{-i(m+fN)\varphi}$  и проинтегрируем по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $\alpha$ . В результате получим такую систему интегральных уравнений

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{g_y=0}^1 \sum_{n=-n_{g_y}-1}^{n_{g_y}} \int_{-1}^{1*} U_{in}^{g_y}(\zeta) \cdot K_{ki,nf}^{g_x g_y}(z, \zeta) \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta = \alpha F_{kf}^{g_x}(z), \quad z \in [-1, 1] \quad (8.3)$$

$$f = -n_{g_x}, \dots, n_{g_x}, \quad k = 1, 2, \quad g_x = 0, 1,$$

ядро

$$K_{ki,nf}^{g_x g_y}(z, \zeta) = \int_0^\alpha e^{-i(m+fN)\varphi} d\varphi \int_0^{2\pi} e^{i(m+nN)\psi} d\psi A_{ki}^{g_x g_y}(\varphi, \psi; z, \zeta).$$

Мы воспользовались представлением  $j_{in}^{g_y}(\zeta) = U_{in}^{g_y}(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2}$ , которое вытекает из условий Мейкснера на ребре.

Детальный анализ ядра показывает, что при  $g_x = g_y$  и  $k = i$  справедливо следующее представление

$$K_{ki,nf}^{g_x g_y}(z, \zeta) = \frac{C_{nf}^H}{(z-\zeta)^2} - C_{nf}^{\log} \ln|z-\zeta| + O(z-\zeta). \quad (8.4)$$

$C_{nf}^H$  и  $C_{nf}^{\log}$  — некоторые константы. При  $g_x \neq g_y$  или  $k \neq i$  ядро представляет собой регулярную функцию. В этом случае возможен предельный переход под знаком соответствующего интеграла в сумме (8.3) и звездочка над интегралом пропадает. В случае же, когда  $g_x = g_y$  и  $k = i$ , мы имеем дело с интегралом вида

$$\int_{-1}^{1*} \frac{L(z, \zeta)}{(z-\zeta)^2} \sqrt{1-\zeta^2},$$

который нужно понимать в смысле конечной части по Адамару.

Переход к дискретному аналогу уравнения (8.3), т.е. к СЛАУ, осуществляется с помощью квадратурных формул [4], построенных на основе интерполяции многочленами Чебышева первого рода. Для вычисления ядра можно использовать следующую квадратуру, построенную на основе тригонометрической интерполяции

$$\begin{aligned} & \int_0^\alpha e^{-i(m+fN)\varphi} d\varphi \int_0^{2\pi} e^{i(m+nN)\psi} d\psi M(\varphi, \psi; z, \zeta) \approx \\ & \approx \left( \frac{\alpha}{2n_\varphi + 1} \right)^2 \sum_{l=0}^{2n_\varphi} \sum_{s=0}^{2n_\varphi} \left( \sum_{j=0}^{N-1} M(\varphi_l^{n_\varphi} - \alpha j, \varphi_{0s}^{n_\varphi}; z, \zeta) e^{im\alpha j} \right) \times \\ & \times e^{i(m+nN)\varphi_{0s}^{n_\varphi}} e^{-i(m+fN)\varphi_l^{n_\varphi}}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где  $\varphi_l^{n_\varphi} = l\alpha / (2n_\varphi + 1)$ ,  $\varphi_{0s}^{n_\varphi} = (s + 0.5)\alpha / (2n_\varphi + 1)$ .

### 9. Второй подход к решению — гиперсингулярные интегралы по замкнутым кривым

В этом подходе вместо функции  $U_{in}^{g_y}$  используется  $j_{in}^{g_y}$ , для которой строится кусочно-полиномиальный интерполянт. На отрезке  $[-1,1]$  выбираются две равномерные сетки с перемежающимися узлами

$$a_k = -1 + kh, \quad k = 0, \dots, n_z,$$

$$t_k = a_k - h/2, \quad k = 1, \dots, n_z,$$

$h = 2/n_z$ ,  $n_z$  — объем сеток. Для функции  $j_{in}^{g_y}$  на отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$  строится интерполяционный полином Лагранжа с узлами  $\{t_{k-1}, t_k, t_{k+1}\}$  при  $k = 2, \dots, n_z - 1$ ;  $\{t_1, t_2\}$  при  $k = 1$  и  $\{t_{n_z-1}, t_{n_z}\}$  при  $k = n_z$ . Таким образом, для аппроксимации используются многочлены не выше второго порядка.

После замены искомой функции интерполянтом, уравнение (8.3), записанное в узлах  $z \in \{t_i\}_{i=1}^{n_z}$  даст СЛАУ. Элементы матрицы будут содержать гиперсингулярные интегралы. Чтобы их хорошо посчитать предлагается следующая методика.

Во-первых, договоримся множитель  $|\hat{y}'_{\psi}(\psi)|$  вносить не в решение  $j_{in}^{g_y}$  как ранее, а присоединять к ядру. Тогда для ядра при  $g_x = g_y$  и  $k = i$  можно записать представление

$$A_{ki}^{g_x g_y}(x, y) = \frac{|\hat{x}'(\psi)|}{|x - y|^3} + \frac{B(\varphi)}{|x - y|} + f(x, y),$$

где  $f(x, y)$  — регулярная добавка. В содержащем ее интеграле можно будет перейти к пределу и снять звездочку с интеграла. Что касается первых двух слагаемых, то они имеют особенность (второе слагаемое — интегрируемую особенность), на их вычислении мы остановимся отдельно.

Поскольку у нас цилиндрический случай, то  $|x - y|^2 = a^2(z - \zeta)^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2$ . Основная проблема, таким образом, заключается в том, чтобы посчитать интегралы

$$\int_0^{\alpha} e^{-i(m+fN)\varphi} d\varphi \int_0^{2\pi} e^{i(m+nN)\psi} d\psi \left[ \frac{|\hat{x}'(\psi)|}{\int_{-h/2}^{h/2} s^{m_0} \frac{ds}{\{a^2(s-d_{ik})^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2\}^{3/2}}} + \right. \\ \left. + B(\varphi) \int_{-h/2}^{h/2} s^{m_0} \frac{ds}{\sqrt{a^2(s-d_{ik})^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2}} \right].$$

Здесь  $d_{ik} = t_i - t_k$ ,  $m_0 = 0, 1, 2$ . Поскольку сетка равномерная, то достаточно рассмотреть лишь случай  $d_{ik} = d_{1k}$ .

Идея метода состоит в том, чтобы посчитать интегралы по переменной  $s$  аналитически, после этого проанализировать полученную функцию при  $\psi = \varphi$ , выделить особенность в отдельное слагаемое и считать интегралы по  $d\psi$  и  $d\varphi$

с учетом этой особенности. Несложно проверить, что справедливо следующее представление

$$\int_{-h/2}^{h/2} s^{m_0} \left[ \frac{|\hat{x}'(\psi)|}{\{a^2(s-d_{1k})^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2\}^{3/2}} + \frac{B(\varphi)}{\sqrt{a^2(s-d_{1k})^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2}} \right] ds =$$

$$= \delta_{1k} \left[ C |\hat{x}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |\hat{x} - \hat{y}|^2 + \hat{C} \ln \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right| \right] + O \left( \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right),$$

$\delta_{1k}$  — символ Кронекера,  $C$  и  $\hat{C}$  — некоторые константы. Со второй производной от логарифма мы поступим аналогично [5] в двумерном случае, а именно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(\psi) |\hat{x}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |\hat{x}_\varepsilon - \hat{y}|^2 d\psi =$$

$$= -\frac{1}{|\hat{x}'(\varphi)|} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi)}{2 \sin^2((\psi - \varphi)/2)} d\psi + \tag{9.1}$$

$$+ \int_0^{2\pi} f(\psi) \left\{ |\hat{x}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |\hat{x} - \hat{y}|^2 + \frac{1}{|\hat{x}'(\varphi)|} \cdot \frac{1}{2 \sin^2((\psi - \varphi)/2)} \right\} d\psi,$$

где первый интеграл в правой части равенства надо понимать как гиперсингулярный в смысле конечной части по Адамару, второй интеграл не имеет особенностей.

Используя квадратурные формулы [4], построенные на основе тригонометрического интерполирования, а также формулу (8.5) элементы матрицы СЛАУ можно посчитать с любой степенью точности.

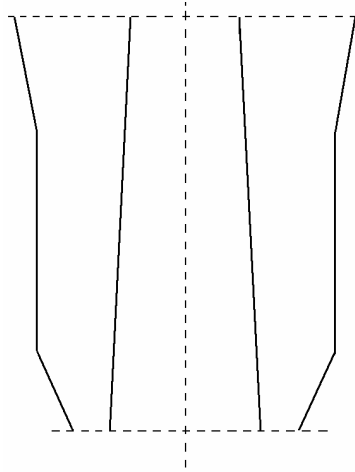


Рис.2. Продольный срез резонатора со скосами

Изложенный метод существенно использует цилиндричность ситуации, однако его с небольшими видоизменениями можно применять и в случае конусов, т.е. когда продольное сечение резонатора имеет скосы как, например,

на рисунке 2. Такое применение становится возможным, поскольку интегралы вида

$$\int_a^b \frac{s^{m_0} ds}{(D + Cs + As^2)^q}$$

где  $q = 1/2, 3/2$ ,  $m_0 = 0, 1, 2$  также можно вычислить аналитически.

Возможна некоторая модификация описанного метода, позволяющая построить более качественную аппроксимацию для элементов матрицы СЛАУ. Область применимости этой модификации, однако, ограничивается цилиндрическими резонаторными структурами, поскольку в этом случае вектора  $n(y)$ ,  $\tau_k(y)$  не зависят от координаты  $\zeta$ , а только от угла  $\psi$  и поэтому могут быть вынесены за знак интеграла по  $\zeta$ . Разберем необходимые действия на примере части ядра в (4.3). Запишем такое представление

$$\frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \frac{e^{ipt}}{t} = \frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \left\{ \frac{1}{t} - \frac{p^2}{2!}t + \frac{p^4}{4!}t^3 \right\} + M(x, y).$$

Здесь обозначено  $t = |x - y|$  и

$$M(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \left\{ ip - i \frac{p^3}{3!}t^2 + \frac{e^{ipt} - 1 - ipt + \frac{p^2}{2!}t^2 + i \frac{p^3}{3!}t^3 - \frac{p^4}{4!}t^4}{t} \right\}$$

— очень гладкая, хорошая для расчетов функция.

Неизвестную функцию  $j_{in}^{gy}$  аппроксимируем также как и ранее. И будем считать интегралы

$$\int_0^\alpha e^{-i(m+fN)\varphi} d\varphi \int_0^{2\pi} e^{i(m+nN)\psi} d\psi \int_{-h/2}^{h/2^*} s^{m_0} \frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} ds |\hat{y}'(\psi)|, \quad (9.2)$$

используя равенство

$$\int_{-h/2}^{h/2^*} s^{m_0} \frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \frac{e^{ip|x-y|}}{|x-y|} ds |\hat{y}'(\psi)| = \int_{-h/2}^{h/2} s^{m_0} M(x, y) |\hat{y}'(\psi)| ds + \hat{f}(\psi, \varphi),$$

где

$$\hat{f}(\psi, \varphi) = |\hat{y}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(x)\partial n(y)} \int_{-h/2}^{h/2^*} s^{m_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2(s-d_{1k})^2 + b^2}} - \frac{p^2}{2!} \sqrt{a^2(s-d_{1k})^2 + b^2} + \frac{p^4}{4!} \{a^2(s-d_{1k})^2 + b^2\}^{3/2} \right\} ds, \quad b = |\hat{x} - \hat{y}|.$$

Интеграл по  $s$  вычисляется аналитически, после чего полученное выражение дифференцируется дважды по нормали и результат анализируется при  $\psi = \varphi$ . Путем указанных операций получаем представление



$$\hat{f}(x, y) = C_0 |\hat{x}'(\psi)| \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \ln |\hat{x} - \hat{y}|^2 + C_1 \ln \left| \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right| + \mathcal{O} \left( \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right).$$

$C_0$  и  $C_1$  — константы. Поэтому интеграл по  $\psi$  в (9.2) берется с учетом этого разложения и правила (9.1).

Это более громоздкий способ, но он обеспечивает хорошую точность для элементов матрицы СЛАУ при гораздо меньших объемах сеток по  $\varphi$  и  $\psi$ .

### 10. Связь с двумерным случаем

Если в уравнении (4.3) положить  $j_1(y) \equiv 0, y \in S$  и устремить высоту резонатора  $\ell \rightarrow \infty$ , считая при этом  $j_2(\psi, \zeta) = j_2(\psi)$ , то получится уравнение вида

$$\int_L^* U(\hat{y}) \frac{\partial^2}{\partial n(x) \partial n(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ip\sqrt{z^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2})}{\sqrt{z^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2}} dz dS_y = 0, \quad \hat{x} \in L,$$

где  $L$  — совокупность замкнутых кривых в поперечном сечении резонатора (рис. 1). В правой части стоит ноль, поскольку падающее поле, также не зависящее от переменной  $z$ , на бесконечности должно исчезнуть. Путем простых преобразований получим представление для ядра

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ip\sqrt{z^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2})}{\sqrt{z^2 + |\hat{x} - \hat{y}|^2}} dz = -\frac{\pi}{i} H_0^{(1)}(p|\hat{x} - \hat{y}|).$$

$H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

Такое же уравнение было получено при решении плоской задачи [6] (при условии, что в качестве фундаментального решения берется функция Ханкеля — такая замена устраняет внешние паразитные спектральные числа). Следует также заметить, что в результате проведения численных экспериментов, было обнаружено, что свойство  $j_1(y) \equiv 0, y \in S$  будет выполнено, если брать падающее поле  $F_1(x) \equiv 0, x \in S$ . Таким образом, предельным случаем нашей трехмерной задачи при бесконечном увеличении высоты резонатора является плоская спектральная задача.

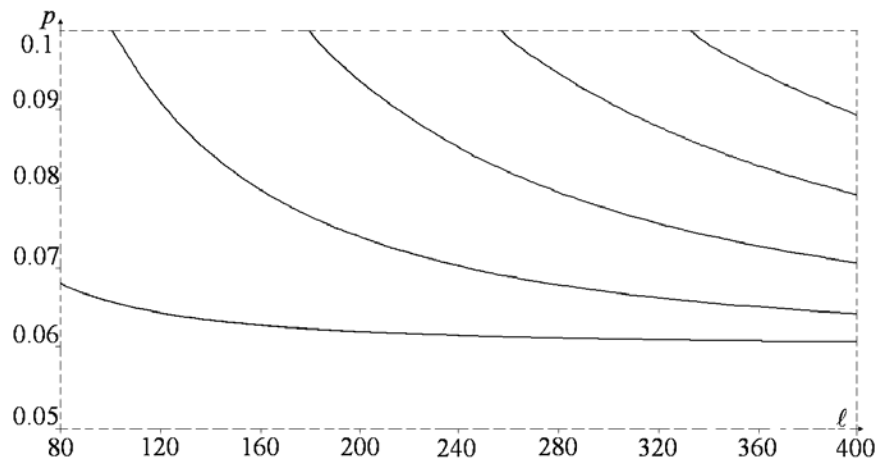


Рис.3. Зависимость спектра от высоты резонатора

Выберем параметры резонатора  $N = 4$ ,  $R_0 = 26.38425$ ,  $R_1 = 7.49746$ ,  $d = 0.45$ . Будем изучать решения с номером моды  $m = 1$ . На рисунке 3 графически отражена зависимость спектра в интервале  $p \in [0.05, 0.1]$  (ось ординат) от высоты резонатора, которая менялась в пределах  $\ell \in [80, 400]$  (ось абсцисс). График построен с использованием модификации метода с кусочно-полиномиальной аппроксимацией. В двумерном случае с помощью методики [6] в указанном диапазоне было найдено единственное спектральное значение  $p_0 = 0.06069$ . Как видно из рисунка, спектральные значения резонатора конечной высоты изменяются с ростом высоты, двигаясь по гладким кривым, которые в пределе  $\ell = \infty$  стягиваются к значению  $p_0$ . По-видимому, “конечность” высоты резонатора приводит к расщеплению спектральных значений плоской задачи в соответствии с их кратностью. Можно установить, таким образом, соответствие между решениями плоской задачи и трехмерной задачи для резонатора конечной высоты.

Любопытно отметить еще одну особенность решения. В обоих случаях (конечной и бесконечной высоты) “соответствующие” решения как функции цилиндрического угла  $\varphi$  ведут себя аналогично. Т.е. для получения спектрального числа с одной и той же точностью в обоих случаях для аппроксимации решения нужно брать гармоники Фурье (8.2) с одними и теми же номерами.

### 11. Результаты численных экспериментов

Для проведения численных экспериментов был выбран резонатор с параметрами  $N = 4$ ,  $R_0 = 26.38425$ ,  $R_1 = 7.49746$ ,  $d = 0.45$ ,  $\ell = 80$ . Рассматривались решения с номером моды  $m = 1$ . Индексы учитываемых гармоник Фурье по модулю не превосходят  $n_0 = 0$  на поверхности  $S_0$  и  $n_1 = 1$  на  $S_1$ . Учет большего числа гармоник не изменяет получаемых четырех знаков после запятой в значении найденного спектрального числа.

Таблица 1. Кусочно-полиномиальная аппроксимация

$n_z$	$P$
30	0.06842
40	0.06846
50	0.06848

В таблицах 1 и 2 приводятся результаты расчета спектра в диапазоне  $p \in [0.01, 0.1]$  с помощью двух описанных методик (для гладкого случая берется модификация). Метод с кусочно-полиномиальной аппроксимацией дает достаточно быструю стабилизацию четырех знаков после запятой, тогда как аппроксимация многочленами Чебышева дает неудовлетворительные результаты по сходимости. Такая медленная сходимость, очевидно, обусловлена некачественной аппроксимацией. Причин этому, по мнению автора данной работы две. Первая заключается в том, что все тонкости поведения ядра мы прячем в множитель  $(z - \zeta)^{-2}$  и вместо представления (8.4) используем запись  $L(z, \zeta) \cdot (z - \zeta)^{-2}$ . Таким образом, существенная информация о поведении ядра теряется. Вторая причина — это присутствие “высших” гармоник в сумме (8.2). Под “высшими” подразумеваются ненулевые  $n$  и  $f$ . Закономерность следующая: чем выше  $n$  и  $f$  (по модулю), тем хуже ведет себя функция  $(z - \zeta)^2 K_{ki, nf}^{g_x g_y}(z, \zeta)$  при малом  $|z - \zeta|$  (случай  $k = i$  и  $g_x = g_y$ ).

Таблица 2. Аппроксимация многочленами Чебышева

$n_z$	$P$
14	0.07066
20	0.07036
25	0.07009
30	0.06987
35	0.06969
40	0.06956
50	0.06937

На рисунке 4 изображен график спектральной мощности  $N(p)$  на указанном интервале. Хорошо различимый пик соответствует резонансу при  $p = 0.0684$ .

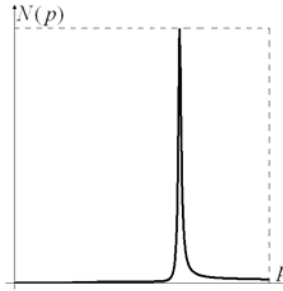


Рис.4. Спектральная мощность на  $[0.01, 0.1]$

## 12. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложены два подхода к спектральному анализу открытых цилиндрических резонаторов конечной высоты. Показано, что метод на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации (модификация) способен обеспечить высокую точность результатов и устойчивость вычислительного процесса. При использовании мощных вычислительных комплексов, метод обеспечит получение решения в диапазоне высоких частот, что интересно для приложений.

Можно в дальнейшем улучшить первый подход, если учесть детальную структуру ядра и применить смешанную аппроксимацию. Это позволит избежать проблем, описанных в предыдущем разделе. Во втором подходе (модификация) можно попробовать отказаться от кусочно-полиномиальной аппроксимации и использовать интерполянт, построенный на основе тригонометрических функций. Оставляя, однако, идею о вынесении производных за знак интеграла и вычисления интегралов аналитически.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dumbrajs I., Nusinovich G.S. Coaxial gyrotrons: past, present and future (review) // IEEE Transactions on Plasma Science. – June 2004. – V.32, №3. – P.934-946.
2. Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Стешенко С.А. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов // Журнал технической физики. – 2004. – Т.74, №7. – С.81-89.
3. Щербина В.А. Дифракция электромагнитных волн на разрезе в  $\mathbb{R}^3$  // Электромагнитные явления. – 1998. – Т.1, №4. – С.1-4.
4. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие, часть 1. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков-Херсон, 2000. – 92с.
5. Митина И.В. Численно аналитический метод для спектрального анализа электромагнитного поля в плоском резонаторе // Вестник ХНУ им. В.Н.Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. – 2005. – Т.711, №55. – С.104-120.
6. Митина И.В. Метод численного моделирования собственных колебаний электромагнитного поля в цилиндрическом резонаторе // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон, 2006. – Вып.2(25). – С.341-345.