

Размещение пассивной примеси в прямоугольной полости при периодическом движении границы в приближении Стокса

Р. Бернинг, А. А. Гуржий, В. В. Мелешко

*Киевский национальный университет им.Тараса Шевченко, Украина
Институт гидромеханики НАНУ, Украина*

The problem on motion of passive fluid contours in a rectangular two-dimensional cavity in Stokes approaching is considered. Fluid flow generated by periodic motion of parts of bounded surfaces is analyzed. There are singularities on boundaries, where velocities of boundaries conjugate. Mathematical problem is reduced to the solution of a biharmonic equation in terms of stream function taking into account a separation of singularities mentioned before. Investigations and numerical modeling shows that the periodical viscous flow inside a rectangular cavity has an intensive stirring regime.

1. Введение

Задача о перемешивании вязких жидкостей ламинарными течениями принадлежит к числу наиболее интересных задач прикладной гидромеханики. Среди основных механизмов перемешивания жидкостей можно выделить диффузионное перемешивание, определяемое молекулярным движением, и конвекционное перемешивание, вызванное течением жидкости. В некоторых случаях, анализ масштабов задачи позволяет заключить, что преобладающим является конвекционный механизм. Если физические свойства перемешиваемых жидкостей незначительно отличаются, то решение задачи сводится к анализу процесса перемешивания пассивной примеси в заданном поле скорости. Такая задача в современной литературе получила название *задача об адвекции* [1].

Известно [2,3], что при определенных условиях ламинарные течения могут проявлять интенсивные режимы адвекции. К числу таких течений относятся периодические течения в прямоугольной полости в приближении Стокса ($Re \rightarrow 0$), которые развиваются при периодическом движении границ. Основные закономерности процесса адвекции для симметричного движения противоположных границ прямоугольной полости достаточно подробно изучены (смотри, например, работу [4] и ссылки в ней). Случаи периодического несимметричного движения одной из границ прямоугольной полости в настоящее время исследованы недостаточно полно. Анализ таких течений встречает ряд трудностей, связанных с точностью описания поля скорости, особенно в области сопряжения движущихся с различными скоростями границ или их частей.

Целью настоящей работы является изучение основных закономерностей процесса адвекции пассивной примеси в двухмерном течении, сформированном при периодическом движении частей одной из границ прямоугольной полости в приближении Стокса.

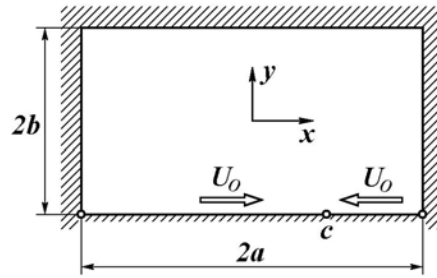


Рис.1. Геометрия задачи.

2. Уравнения движения

Рассмотрим двумерное периодическое течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости с размерами $2a \times 2b$ (рис.1) в приближении Стокса, в котором вязкие эффекты являются преобладающими над инерционными. Пусть часть $(-a < x < c)$ нижней границы движется с постоянной скоростью U_0 в положительном направлении оси Ox , а часть границы $(c < x < a)$ перемещается с аналогичной скоростью, но в противоположном направлении. Здесь c - точка сопряжения скоростей движения границ. Для первого полупериода $(0 \leq t \leq T_1)$ движения границ $c = a/2$, а для второго полупериода $(T_1 \leq t \leq T_2)$ имеем $c = -a/2$. Полагаем, что $T_1 = T_2 = T$.

Для определения траекторий движения пассивных жидких частиц (пассивная адвекция) необходимо определить поле скорости течения в рассматриваемой полости. Решение динамической задачи сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции тока

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0 \quad (1)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\Psi(\pm a, y) = 0, \quad (\partial \Psi / \partial x)_{x=\pm a} = 0, \quad (2)$$

$$\Psi(x, \pm b) = 0, \quad (\partial \Psi / \partial y)_{y=b} = 0, \quad (\partial \Psi / \partial y)_{y=-b} = \begin{cases} U_0, & x < c \\ -U_0, & x > c \end{cases}.$$

Распределение функции тока в рассматриваемом течении можно представить в виде суперпозиции четырех функций тока

$$\Psi(x, y) = A\Psi_1(x, y) + B\Psi_2(x, y) + C\Psi_3(x, y) + D\Psi_4(x, y), \quad (3)$$

где $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ - функции тока течений, поля скоростей которых являются четными по координате Ox , и четным и нечетным по координате Oy , соответственно, а $\Psi_3(x, y)$ и $\Psi_4(x, y)$ - функции тока течений, для которых поля скоростей являются нечетными по координате Ox , и четным и нечетным по координате Oy , соответственно. В приведенном выражении A , B , C и D - весовые множители.

Решение первой бигармонической задачи ищем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) = a \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{\beta_l} Y_l^{(1)} \left(ath \beta_l a \frac{ch \beta_l x}{ch \beta_l a} - x \frac{sh \beta_l x}{ch \beta_l a} \right) \cos \beta_l y - \\ - b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\alpha_m} X_m^{(1)} \left(bth \alpha_m b \frac{ch \alpha_m y}{ch \alpha_m b} - y \frac{sh \alpha_m y}{ch \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_m = (2m-1)\pi/2a$, $\beta_l = (2l-1)\pi/2b$. Подстановка этого выражения в граничные условия (2) с учетом тождеств, приведенных в приложении, приводит к линейной алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned} X_m^{(1)} b \Delta_1(\alpha_m b) - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{(1)} \frac{4\alpha_m^2 \beta_l}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} = (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(1)}}{a} \sin \alpha_m c, \\ Y_l^{(1)} a \Delta_1(\beta_l a) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(1)} \frac{4\beta_m^2 \alpha_l}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

относительно неизвестных $X_m^{(1)}$ и $Y_l^{(1)}$. Здесь использовано обозначение $\Delta_1(\xi) = th \xi + \xi / ch^2 \xi$. Решение (5) обладает слабой сходимостью коэффициентов $X_m^{(1)}$ и $Y_l^{(1)}$, которое вызвано тем, что в правой части системы стоит неубывающая знакопеременная функция. Асимптотическое поведение решения значительно улучшается при введении замены

$$X_m^{(1)} = x_m^{(1)} + (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(1)}}{ab} \sin \alpha_m c, \quad Y_l^{(1)} = y_l^{(1)}. \quad (6)$$

В этом случае бесконечная система уравнений (5) может быть сведена к конечной алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned} x_m^{(1)} b \Delta_1(\alpha_m b) - \sum_{l=1}^L y_l^{(1)} \frac{4\alpha_m^2 \beta_l}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} = (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(1)}}{a} [1 - \Delta_1(\alpha_m b)] \sin \alpha_m c, \quad (7) \\ y_l^{(1)} a \Delta_1(\beta_l a) - \sum_{m=1}^M x_m^{(1)} \frac{4\beta_l^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} = \frac{8U_0^{(1)} \beta_l^2}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_l^2)^2} \sin \alpha_m c, \end{aligned}$$

решение которой обладает быстрой сходимостью. Анализ показывает, что при проведении вычислений можно положить $L = M = 5$.

Таким образом, распределение функции тока в первой задаче имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) = a \sum_{l=1}^L \frac{(-1)^{l-1}}{\beta_l} y_l^{(1)} \left(ath \beta_l a \frac{ch \beta_l x}{ch \beta_l a} - x \frac{sh \beta_l x}{ch \beta_l a} \right) \cos \beta_l y - \\ - b \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^{m-1}}{\alpha_m} x_m^{(1)} \left(bth \alpha_m b \frac{ch \alpha_m y}{ch \alpha_m b} - y \frac{sh \alpha_m y}{ch \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x - \Psi_1^*, \quad (8) \\ \Psi_1^* = -\frac{U_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ B^{(-)} \arctg \Phi_1^{(1)} - B^{(-)} \arctg \Phi_1^{(2)} + \right. \\ \left. + B^{(+)} \arctg \Phi_1^{(3)} - B^{(+)} \arctg \Phi_1^{(4)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)} &= \frac{\sin[\pi(c-x)/2a]}{\operatorname{sh}[\pi B^{(-)}/2a]}, & \Phi_1^{(2)} &= \frac{\sin[\pi(c+x)/2a]}{\operatorname{sh}[\pi B^{(-)}/2a]}, \\ \Phi_1^{(3)} &= \frac{\sin[\pi(c-x)/2a]}{\operatorname{sh}[\pi B^{(+)} /2a]}, & \Phi_1^{(4)} &= \frac{\sin[\pi(c+x)/2a]}{\operatorname{sh}[\pi B^{(+)} /2a]},\end{aligned}$$

где последнее слагаемое было получено после подстановки (6) в уравнение (4), с последующим изменением порядка суммирования и использования тождеств, приведенных в приложении.

Решение второй задачи, поле скорости которой является четной по координате Ox и нечетной по координате Oy , ищем в виде

$$\begin{aligned}\Psi_2(x, y) &= a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k} Y_k^{(2)} \left(ath \delta_k a \frac{ch \delta_k x}{ch \delta_k a} - x \frac{sh \delta_k x}{ch \delta_k a} \right) \sin \delta_k y + \\ &+ b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} X_m^{(2)} \left(b cth \alpha_m b \frac{sh \alpha_m y}{sh \alpha_m b} - y \frac{ch \alpha_m y}{sh \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x, \quad (9)\end{aligned}$$

где $\delta_k = \pi k / b$. Подстановка этого выражения в граничные условия (2) приводит к линейной алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned}X_m^{(2)} b \Delta_2(\alpha_m b) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(2)} \frac{4\alpha_m^2 \delta_k}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(2)}}{a} \sin \alpha_m c, \\ Y_k^{(2)} a \Delta_1(\delta_k a) + \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(2)} \frac{4\delta_k^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= 0, \quad (10)\end{aligned}$$

где $\Delta_2(\xi) = cth \xi - \xi / sh^2 \xi$. Сходимость решения (10) улучшается при замене

$$X_m^{(2)} = x_m^{(2)} + (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(2)}}{ab} \sin \alpha_m c, \quad Y_k^{(2)} = y_k^{(2)}. \quad (11)$$

Аналогичные первой задаче преобразования позволяют представить систему уравнений (10) в виде

$$\begin{aligned}x_m^{(2)} b \Delta_2(\alpha_m b) + \sum_{k=1}^K y_k^{(2)} \frac{4\alpha_m^2 \delta_k}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= (-1)^{m-1} \frac{2U_0^{(2)}}{a} [1 - \Delta_2(\alpha_m b)] \sin \alpha_m c, \quad (12) \\ y_k^{(2)} a \Delta_1(\delta_k a) + \sum_{m=1}^M x_m^{(2)} \frac{4\delta_k^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= \frac{8U_0^{(1)} \delta_k^2}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} \sin \alpha_m c,\end{aligned}$$

тогда решение системы, $x_m^{(2)}$ и $y_k^{(2)}$, обладает быстрой сходимостью.

Таким образом, в рассматриваемой задаче распределение функции тока

$$\begin{aligned}\Psi_2(x, y) &= a \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^l}{\delta_k} y_k^{(2)} \left(ath \delta_k a \frac{ch \delta_k x}{ch \delta_k a} - x \frac{sh \delta_k x}{ch \delta_k a} \right) \sin \delta_k y + \\ &+ b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} x_m^{(2)} \left(b cth \alpha_m b \frac{sh \alpha_m y}{sh \alpha_m b} - y \frac{ch \alpha_m y}{sh \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x - \Psi_2^*, \quad (13)\end{aligned}$$

$$\Psi_2^* = \frac{U_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ B^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_2^{(1)} + B^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_2^{(2)} - B^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_2^{(3)} - B^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_2^{(4)} \right\},$$

где $\Phi_2^{(j)} = \Phi_1^{(j)}$. Последнее слагаемое в выражении (13) было получено после подстановки (11) в уравнение (9), с последующим изменением порядка суммирования и использования тождеств, приведенных в приложении.

Решение третьей задачи находим в аналогичном виде

$$\begin{aligned} \Psi_3(x, y) = & a \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\beta_l} Y_l^{(3)} \left(a \operatorname{cth} \beta_l a \frac{\operatorname{sh} \beta_l x}{\operatorname{sh} \beta_l a} - x \frac{\operatorname{ch} \beta_l x}{\operatorname{sh} \beta_l a} \right) \cos \beta_l y - \\ & - b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma_n} X_n^{(3)} \left(b \operatorname{th} \gamma_n b \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} - y \frac{\operatorname{sh} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right) \cos \gamma_n x, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\gamma_n = \pi n / a$ и $\beta_l = (2l - 1)\pi / 2b$. Подстановка приведенного выражения в граничные условия (2) приводит к линейной алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned} X_n^{(3)} b \Delta_1(\gamma_n b) - \sum_{l=1}^{\infty} Y_l^{(3)} \frac{4\gamma_n^2 \beta_l}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} &= \frac{2U_0^{(3)}}{a} [1 - (-1)^n \cos \gamma_n c], \\ Y_l^{(3)} a \Delta_2(\beta_l a) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(3)} \frac{4\beta_l^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Асимптотическое поведение решения $X_n^{(3)}$ и $Y_l^{(3)}$ системы уравнений (15) значительно улучшится при введении замены переменных

$$X_n^{(3)} = X_3 + x_n^{(3)} - (-1)^n \frac{2U_0^{(3)}}{ab} \cos \gamma_n c, \quad Y_l^{(3)} = Y_3 + y_l^{(3)}, \quad (16)$$

где $X_3 = 2\pi^2 U_0 / [ab(\pi^2 - 4)]$ и $Y_3 = 4\pi U_0 / [ab(\pi^2 - 4)]$. Подробности определения постоянных X_3 и Y_3 можно найти в [5].

В этом случае бесконечная система уравнений (15) может быть сведена к конечной алгебраической системе

$$\begin{aligned} x_n^{(3)} b \Delta_1(\gamma_n b) - \sum_{l=1}^L y_l^{(3)} \frac{4\gamma_n^2 \beta_l}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} &= \frac{2U_0^{(3)}}{a} - X_3 b \Delta_1(\gamma_n b) - \\ & - (-1)^n \frac{2U_0^{(3)}}{a} [1 - \Delta_1(\gamma_n b)] \cos \gamma_n c + 4Y_3 \gamma_n^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_l}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2}, \\ y_l^{(3)} a \Delta_2(\beta_l a) - \sum_{n=1}^N x_n^{(3)} \frac{4\beta_l^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} &= -Y_3 a \Delta_2(\beta_l a) - \\ & - \frac{8U_0^{(3)} \beta_l^2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2} \cos \gamma_n c + 4X_3 \beta_l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \beta_l^2)^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

решение которой обладает быстрой сходимостью $x_n^{(3)}$ и $y_l^{(3)}$.

В конечном итоге распределение функции тока имеет вид

$$\Psi_3(x, y) = a \sum_{l=1}^L \frac{(-1)^l}{\beta_l} y_l^{(3)} \left(a \operatorname{cth} \beta_l a \frac{\operatorname{sh} \beta_l x}{\operatorname{sh} \beta_l a} - x \frac{\operatorname{ch} \beta_l x}{\operatorname{sh} \beta_l a} \right) \cos \beta_l y - a Y_3 S_\beta^{(3)} -$$

$$- b \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\gamma_n} x_n^{(3)} \left(b \operatorname{th} \gamma_n b \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} - y \frac{\operatorname{sh} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x + b X_3 S_\gamma^{(3)} - S_C^{(3)}, \quad (18)$$

где
$$S_\beta^{(3)} = \frac{b}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ A^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_3^{(1)} - A^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_3^{(2)} \right\},$$

$$S_\gamma^{(3)} = \frac{a}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ B^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_3^{(4)} - B^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_3^{(4)} \right\},$$

$$S_C^{(3)} = \frac{U_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ B^{(-)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_3^{(5)} + \operatorname{arctg} \Phi_3^{(6)} \right) + B^{(+)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_3^{(7)} + \operatorname{arctg} \Phi_3^{(8)} \right) \right\},$$

$$\Phi_3^{(1)} = \frac{\cos[\pi y / 2b]}{\operatorname{sh}[\pi A^{(-)} / 2b]}, \quad \Phi_3^{(5)} = \frac{\sin[\pi(x-c)/a]}{\exp[\pi B^{(-)} / a] - \cos[\pi(x-c)/a]},$$

$$\Phi_3^{(2)} = \frac{\cos[\pi y / 2b]}{\operatorname{sh}[\pi A^{(+)} / 2b]}, \quad \Phi_3^{(6)} = \frac{\sin[\pi(x+c)/a]}{\exp[\pi B^{(-)} / a] - \cos[\pi(x+c)/a]},$$

$$\Phi_3^{(3)} = \frac{\sin[\pi x / a]}{\exp[\pi B^{(-)} / a] + \cos[\pi x / a]}, \quad \Phi_3^{(7)} = \frac{\sin[\pi(x-c)/a]}{\exp[\pi B^{(+)} / a] - \cos[\pi(x-c)/a]},$$

$$\Phi_3^{(4)} = \frac{\sin[\pi x / a]}{\exp[\pi B^{(+)} / a] + \cos[\pi x / a]}, \quad \Phi_3^{(8)} = \frac{\sin[\pi(x+c)/a]}{\exp[\pi B^{(+)} / a] - \cos[\pi(x+c)/a]}.$$

Как и ранее, дополнительные слагаемые в уравнении (18) были получены после подстановки (16) в уравнение (14). При этом в выражениях изменялся порядок суммирования и использовались тождества, приведенные в приложении.

Наконец решение последней задачи находим в виде

$$\Psi_4(x, y) = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\delta_k} Y_k^{(4)} \left(a \operatorname{cth} \delta_k a \frac{\operatorname{sh} \delta_k x}{\operatorname{sh} \delta_k a} - x \frac{\operatorname{ch} \delta_k x}{\operatorname{sh} \delta_k a} \right) \sin \delta_k y +$$

$$+ b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma_n} X_n^{(4)} \left(b \operatorname{th} \gamma_n b \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} - y \frac{\operatorname{sh} \gamma_n y}{\operatorname{ch} \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x. \quad (19)$$

Подстановка уравнения (19) в граничные условия (2) дает

$$X_n^{(4)} b \Delta_2(\gamma_n b) - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(4)} \frac{4\gamma_n^2 \delta_k}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} = \frac{2U_0^{(3)}}{a} [1 - (-1)^n \cos \gamma_n c],$$

$$Y_l^{(4)} a \Delta_2(\delta_k a) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(4)} \frac{4\delta_k^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} = 0. \quad (20)$$

Сходимость решения системы уравнений (20) улучшается при введении замены переменных

$$X_n^{(4)} = X_4 + x_n^{(4)} - (-1)^n \frac{2U_0^{(4)}}{ab} \cos \gamma_n c, \quad Y_k^{(4)} = Y_4 + y_k^{(4)}. \quad (21)$$

В рассматриваемом случае $X_3 = X_4$ и $Y_3 = Y_4$, смотри подробности в [5].

Подстановка (21) изменяет вид алгебраической системы уравнений

$$\begin{aligned} x_n^{(4)} b \Delta_2(\gamma_n b) - \sum_{k=1}^K y_k^{(k)} \frac{4\gamma_n^2 \delta_k}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} &= \frac{2U_0^{(4)}}{a} - X_4 b \Delta_2(\gamma_n b) - \\ &- (-1)^n \frac{2U_0^{(4)}}{a} [1 - \Delta_2(\gamma_n b)] \cos \gamma_n c + 4Y_4 \gamma_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2}, \\ y_l^{(4)} a \Delta_2(\delta_k a) - \sum_{n=1}^N x_n^{(4)} \frac{4\delta_k^2 \gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} &= -Y_4 a \Delta_2(\delta_k a) - \\ &- \frac{8U_0^{(4)} \delta_k^2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} \cos \gamma_n c + 4X_3 \delta_k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

В конечном итоге распределение функции тока имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_4(x, y) &= a \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{\delta_k} y_k^{(4)} \left(a \operatorname{cth} \delta_k a \frac{\operatorname{sh} \delta_k x}{\operatorname{sh} \delta_k a} - x \frac{\operatorname{ch} \delta_k x}{\operatorname{sh} \delta_k a} \right) \cos \delta_k y + a Y_4 S_{\beta}^{(4)} + \\ &+ b \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\gamma_n} x_n^{(4)} \left(b \operatorname{cth} \gamma_n b \frac{\operatorname{sh} \gamma_n y}{\operatorname{sh} \gamma_n b} - y \frac{\operatorname{ch} \gamma_n y}{\operatorname{sh} \gamma_n b} \right) \sin \gamma_n x - b X_4 S_{\gamma}^{(4)} + S_C^{(4)}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$S_{\beta}^{(4)} = \frac{b}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ A^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_4^{(1)} - A^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_4^{(2)} \right\},$$

$$S_{\gamma}^{(4)} = \frac{a}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ B^{(-)} \operatorname{arctg} \Phi_4^{(4)} - B^{(+)} \operatorname{arctg} \Phi_4^{(4)} \right\},$$

$$S_C^{(3)} = \frac{U_0}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ B^{(-)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_4^{(5)} + \operatorname{arctg} \Phi_4^{(6)} \right) - B^{(+)} \left(\operatorname{arctg} \Phi_4^{(7)} + \operatorname{arctg} \Phi_4^{(8)} \right) \right\},$$

$$\Phi_4^{(1)} = \frac{\sin[\pi y / 2b]}{\exp[\pi A^{(-)} / b] + \cos[\pi y / b]}, \quad \Phi_4^{(2)} = \frac{\sin[\pi y / 2b]}{\exp[\pi A^{(+)} / b] + \cos[\pi y / b]},$$

$$\Phi_4^{(j)} = \Phi_3^{(j)} \quad \text{при } j = 3, \dots, 8.$$

Наконец, принимая во внимание соотношения между функцией тока и полем скорости течения жидкости

$$U(x, y) = \partial \Psi / \partial y, \quad V(x, y) = -\partial \Psi / \partial x, \quad (24)$$

находим выражения для компонент поля скорости в каждой из задач.

Рассмотрим в качестве примера случай $a = 2.0$, $b = 1.0$, $U_0 = 5.0$ и $T = 2.0$, при этом $A = B = C = D = 2.5$. Распределение функции тока представлено на рис.2. Видно, что в полости имеются две неравные по площади области течения, в которых жидкие частицы движутся по замкнутым траекториям. При вычислениях использовались пять слагаемых в выражениях для функции тока в каждой из рассмотренных задач.

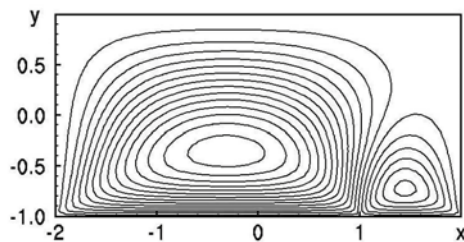


Рис.2. Распределение функции тока.

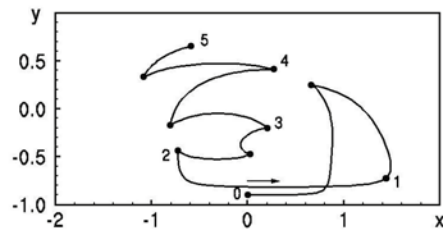


Рис.3. Траектория жидкой частицы.

Точность выполнения граничного условия для скорости в рассматриваемом случае можно выяснить из таблицы 1, в которой показаны значения компонент поля скорости течения на нижней поверхности полости $y = -b$ в течении первого полупериода движения границ. Значения приведены для области, прилегающей к точке $x = c$, в которой сопрягаются скорости движущихся поверхностей.

Таблица 1. Точность выполнения граничных условий для скорости на поверхности.

x	0.95	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02	1.05
$U(x, -b)$	5.0035	5.0027	5.0023	0.0024	-4.9976	-4.9980	-4.9988
$V(x, -b)$	-0.0023	-0.0024	-0.0024	3.1806	-0.0024	-0.0025	-0.0025

Если известно распределение поля скорости $U(x, y)$, $V(x, y)$ внутри полости, то траектория пассивной жидкой частицы определяется из решения задачи Коши

$$\dot{X} = U(x, y), \quad \dot{Y} = V(x, y) \quad (25)$$

с начальными условиями $X(0) = X^{(0)}$, $Y(0) = Y^{(0)}$.

На рис.3 показана траектория жидкой частицы, которая в начальный момент была помещена в точку $(0.0, -0.9)$. На рисунке кружочками показаны положения частицы через каждый полупериод движения нижней границы полости. Чем ближе частица находится к нижней границе, тем на большее расстояние перемещается частица за одинаковые интервалы времени. В рассматриваемом течении имеются две точки, в которых жидкие частицы покоятся (смотри рис.2). Следует заметить, что смена режимов течений приводит к существенному усложнению траекторий движения.

Исследования [1-3,6] показывают, что при определенных условиях пассивные жидкие частицы могут находиться в хаотическом режиме движения. Это значит, что две близлежащие частицы с течением времени быстро удаляются друг от друга. Такой режим движения частиц приводит к интенсивному перемешиванию пассивной жидкости. Одним из критериев для определения режима движения частиц является сечение Пуанкаре [7]. При построении сечения в периодических течениях используется метод дискретизации траектории через одинаковые интервалы времени, равные периоду течения. В результате появляется последовательность точек, которые являются своеобразным протоколом движения рассматриваемой системы.

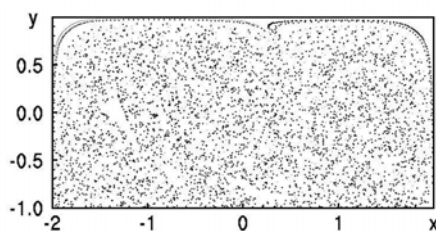


Рис.4. Сечение Пуанкаре.

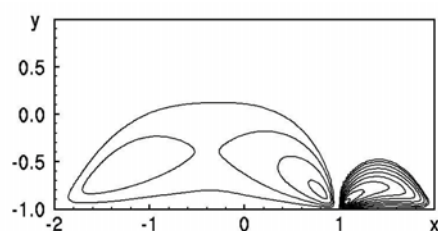


Рис.5. Карта локальных растяжений пассивного контура..

Если последовательность точек сечения Пуанкаре формирует упорядоченную структуру или точки ложатся на какую-либо регулярную кривую, то такое движение системы называется упорядоченным. Если сечение Пуанкаре формирует неупорядоченную последовательность точек, то движение в этой области является хаотическим.

Сечение Пуанкаре для рассматриваемого течения показано на рис.4. Неупорядоченный набор точек сечения свидетельствует о хаотическом движении пассивных жидких частиц [7]. Зона хаотического движения занимает практически всю площадь полости за исключением областей в верхнем левом и правом углах течения. Это значит, что произвольная область (или замкнутый контур) пассивной жидкости, выделенная в начальный момент в зоне хаотического сечения Пуанкаре, будет подвергнута с течением времени сильным деформациям.

На рис.5 нанесена карта локальных растяжений $p(x, y)$ пассивного контура для рассматриваемого течения, которая показывает степень экспоненциального растяжения пассивного контура, попавшего в область с текущими координатами (x, y) в течение последующего короткого (в рамках масштаба задачи) интервала времени [6]. На рисунке нанесены топологические уровни через $\Delta p = 0.1$. Видно, что наибольшее растяжение пассивного контура происходит в областях, прилегающих к движущимся границам. Анализ показывает, что в области, прилегающей к короткой движущейся границе, имеет место более интенсивное растяжение контуров выделенной области пассивной жидкости по сравнению с областью, прилегающей к другой, более протяженной, части движущейся границы.

Рассмотрим процесс адвекции выделенной области пассивной жидкости в изучаемом течении. Для определения положений этой области в фиксированные моменты времени достаточно проследить за движением контура, ограничивающего выделенную область жидкости. Для того, чтобы построить процесс ее формации, использовался метод кусочной сплайн-интерполяции [8], который позволяет сформировать границы замкнутой области, используя упорядоченную последовательность маркеров. Численное моделирование проверялось на сохранение площади во времени, поскольку

$$\frac{dS}{dt} = \oint_{(C)} \frac{d\mathbf{U}}{dt} d\mathbf{C} = \int_{(S)} \frac{d}{dt} [\nabla \mathbf{U}] dS = 0, \quad (26)$$

где (C) - рассматриваемый контур, ∇ - оператор набла.

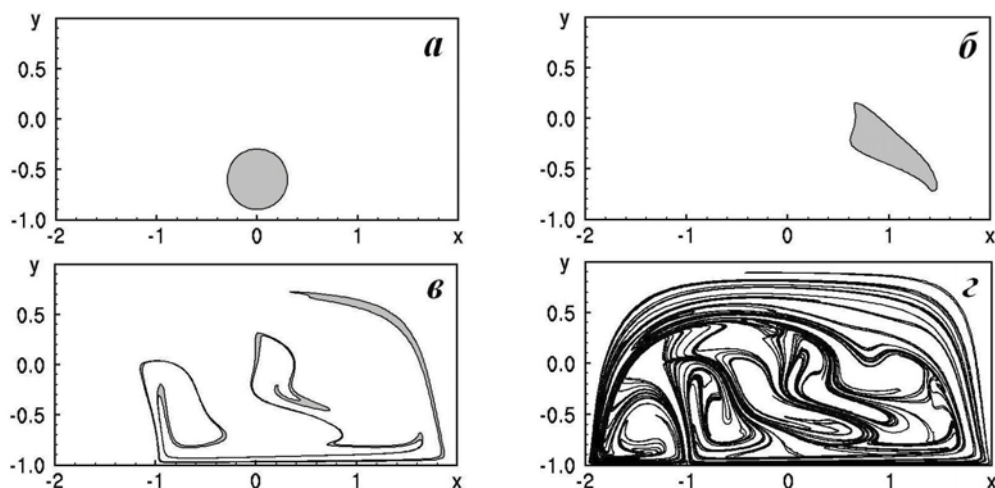


Рис.6. Адвекция пассивного контура в прямоугольной полости.

Адвекция пассивного контура в рассматриваемом течении показана на рис.6. В начальный момент выделена область пассивной жидкости в виде круга радиуса $R = 0.3$ с центром в точке $(0.0, 0.6)$. В течение первого периода адвекции пассивный контур переместился в правую часть полости (рисунок с индексом “б”). При этом интенсивной деформации выделенной области не наблюдается. Однако, в течение следующего периода движения контур попадает в область, близлежащую к границам. Положение выделенной области в момент времени $t = 4T$ показано на рис.6,в. Дальнейшее периодическое движение границ полости приводит к интенсивному перемешиванию выделенной области. Положение контура к моменту времени $t = 14T$ показано на рисунке с индексом “г”. Видно, что пассивная жидкость размешана практически по всей площади полости, что свидетельствует о достаточно высокой эффективности перемешивания в рассматриваемом течении.

3. Выводы

Рассмотрена двумерная задача о перемешивании пассивной жидкости в поле скорости, наведенном движением частей одной из поверхностей прямоугольной полости. Получены аналитические выражения для функции тока течения вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса в виде суперпозиции четырех задач с симметричным и несимметричным распределением поля скорости течения по обоим направлениям границ полости.

Решение каждой из задач представлено в виде конечного ряда с коэффициентами, полученными при решении линейной алгебраической системы уравнений. Выделение особенностей в представлении поля скорости течения на поверхности движущейся границы, имеющей разрыв в профиле скорости, позволило существенно улучшить сходимость решения. В этом случае достигается высокая точность анализа процесса перемешивания пассивной жидкости, особенно в областях, прилегающих к движущимся границам.

Анализ траекторий движения пассивной жидкой частицы и сечения Пуанкаре показывает, что периодическое движение границ приводит к хаотизации течения в полости и, следовательно, к интенсивным режимам перемешивания. Структура локальных карт растяжений контуров, окружающих области пассивных жидкостей, показывает, что наиболее интенсивными зонами перемешивания являются области течения, прилегающие к движущейся границе по сравнению с областями возвратного течения, которые формируются в непосредственной близости к неподвижной границе.

Моделирование процесса адвекции, выполненные для круговой области пассивной жидкости, изначально расположенной в непосредственной близости к движущейся границе, полностью подтверждают выводы, полученные при анализе структуры течения. Анализ результатов моделирования процесса адвекции позволяет заключить, что рассматриваемое течение приводит к интенсивному перемешиванию жидкости. Выделенная в начальный момент времени жидкость распределилась практически равномерно по всей полости за шесть-семь периодов движения нижней границы.

А. Приложение

При выводе выражений для функций тока использовались тождества:

$$d \operatorname{th} \Omega d \frac{ch \Omega z}{ch \Omega d} - x \frac{sh \Omega z}{ch \Omega d} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{4 \omega \Omega}{d(\omega^2 + \Omega^2)^2} \cos \omega z, \quad (\text{A1})$$

где обозначения (Ω, ω, z, d) соответствуют $(\beta_l, \alpha_m, x, a)$, $(\delta_k, \alpha_m, x, a)$, $(\alpha_l, \beta_m, y, b)$, $(\gamma_b, \beta_m, y, b)$.

$$d \operatorname{cth} \Omega d \frac{sh \Omega z}{sh \Omega d} - y \frac{ch \Omega z}{sh \Omega d} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4 \Omega \omega}{d(\Omega^2 + \omega^2)^2} \sin \omega z, \quad (\text{A2})$$

с обозначениями $(\alpha_m, \delta_k, y, b)$, $(\beta_l, \gamma_k, x, a)$, $(\delta_k, \gamma_k, x, a)$ и $(\gamma_n, \delta_k, y, b)$.

$$\begin{aligned} d \operatorname{th} \Omega d \frac{ch \Omega z}{ch \Omega d} - z \frac{sh \Omega z}{ch \Omega d} &= \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left\{ C^{(-)} \exp[-\Omega C^{(-)}] + C^{(+)} \exp[-\Omega C^{(+)}] \right\}, \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \operatorname{cth} \Omega d \frac{ch \Omega z}{ch \Omega d} - z \frac{sh \Omega z}{ch \Omega d} &= \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ C^{(-)} \exp[-\Omega C^{(-)}] - C^{(+)} \exp[-\Omega C^{(+)}] \right\}, \quad (\text{A4}) \end{aligned}$$

где обозначения (Ω, z, d, C) используются вместо (α_m, y, b, B) , (γ_n, y, b, B) , (β_l, x, a, A) или (δ_k, x, a, A) .

При сворачивании сумм используются следующие тождества:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega} \exp[-\Omega A] \sin[\Omega z] = \frac{d}{\pi} \operatorname{arctg} \Phi, \quad (\text{A5})$$

где обозначения (Ω, A, z, d, Φ) применяются вместо $(\alpha_m, B^{(-)}, c-x, \Phi_1^{(1)})$, $(\alpha_m, B^{(-)}, c+x, a, \Phi_1^{(2)})$, $(\alpha_m, B^{(+)}, c-x, a, \Phi_1^{(3)})$, $(\alpha_m, B^{(+)}, c+x, a, \Phi_1^{(4)})$, $(\gamma_m, B^{(-)}, c-x, a, \Phi_3^{(5)})$, $(\gamma_m, B^{(-)}, c+x, a, \Phi_3^{(6)})$, $(\gamma_m, B^{(+)}, c-x, a, \Phi_3^{(7)})$, $(\gamma_m, B^{(+)}, c+x, a, \Phi_3^{(8)})$, $(\gamma_m, B^{(-)}, c-x, a, \Phi_4^{(5)})$, $(\gamma_m, B^{(-)}, c+x, a, \Phi_4^{(6)})$, $(\gamma_m, B^{(+)}, c-x, a, \Phi_4^{(7)})$ или $(\gamma_m, B^{(+)}, c+x, a, \Phi_4^{(8)})$.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Omega} \exp[-\Omega A] \sin[\Omega z] = \frac{d}{\pi} \operatorname{arctg} \Phi, \quad (\text{A6})$$

с аналогичными обозначениями для $(\beta_m, A^{(-)}, y, b, \Phi_3^{(1)})$, $(\beta_m, A^{(+)}, y, \Phi_3^{(2)})$, $(\gamma_m, B^{(-)}, y, b, \Phi_3^{(3)})$, $(\gamma_m, B^{(+)}, y, b, \Phi_3^{(4)})$, $(\delta_m, A^{(-)}, y, b, \Phi_4^{(1)})$, $(\delta_m, A^{(+)}, y, a, \Phi_4^{(2)})$, $(\gamma_m, B^{(-)}, x, a, \Phi_4^{(3)})$ или $(\gamma_m, B^{(+)}, x, a, \Phi_4^{(4)})$.

В приведенных выражениях использовались

$$\begin{aligned} B^{(-)} &= 2rb + b - y, & B^{(+)} &= 2rb + b + y, \\ A^{(-)} &= 2ra + a - x, & A^{(+)} &= 2ra + a + x. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Aref H. Chaotic advection of fluid particles // Trans. Roy. Soc. London. – 1990. – V.333. – p.273-288.
2. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech. - 1984. - V.143. - p.1-23.
3. Meleshko V.V., van Heijst G.J.F., Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties // Chaos, Soliton & Fractals. – 1994. - V.4. - p.977-1010.
4. Meleshko V.V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proc.R.Soc.London – 1996. – V.A452. – p.1999-2022.
5. Meleshko V.V., Gomilko A.M. Infinite systems for biharmonic problem in a rectangle // Proc.R.Soc.London – 1997. – V.A453. – p.2139-2160.
6. Гуржий А.А., Пеерхосаини Х. Локальные карты растяжений: приложение для задачи об адвекции в произвольном поле скорости // Прикладная гидромеханика – 2000. - Т.74, No.1. - с.28-43.
7. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур. – Киев: Наукова думка, 1993, 280 с.
8. Гуржий О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кусковой сплайн-інтерполяції в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доповеді АН України, 1996, N.8, с.48-54.