

## Математические модели для расчета дифракции в цилиндрическом волноводе с патрубками частично заполненным диэлектриком

С. В. Духопельников

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

Singular integral equations for diffraction problems in a cylindrical waveguide with a finite number of sockets partially occupied by dielectric was derived. The discrete mathematic model was made by the method of discrete singularities. The numerical experiments were carried out. The field was build in slit of the sockets.

### 1. Постановка задачи

В работе [1] построены математические модели для Е- и Н- волн в аксиально-симметричном цилиндрическом волноводе круглого сечения с конечным числом гофр. Работа [2] показала возможность расширения класса волноводов, решаемых методом дискретных особенностей, за счет частичного заполнения его диэлектриком. Было предложено заменить гофры патрубками и сравнить влияние угла гофры и выступа патрубка. На рис. 1 показано сечение плоскостью проходящей через ось волновода. «Зона расширений» и «рабочая зона» заполнены диэлектриком, при этом в рабочей зоне и в каждом из патрубков диэлектрическая проницаемость может быть разной.

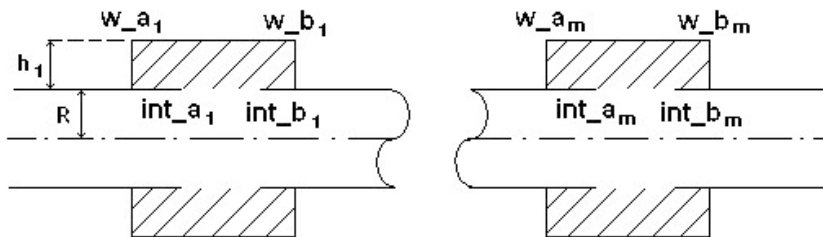


Рис. 1. Сечение волновода с патрубком заполненного диэлектриком.

Временная зависимость полей задается множителем  $e^{-i\omega t}$ .

В виду того, что рассматривается аксиально-симметричный случай, то зависимость от  $\phi$  будет следующая  $\frac{\partial}{\partial \phi} \rightarrow 0$ .

Во внутренности волновода выполняются уравнения Максвелла:

$$\text{rot}H = -i\omega\varepsilon E \quad (1)$$

$$\text{rot}E = i\omega\mu H \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость.

В силу отсутствия источников «внутри волновода» выполняются условия:

$$\text{div}E = 0 \quad \text{div}H = 0 \quad (3)$$

На поверхности цилиндра выполняется граничное условие (касательные компоненты электрического поля на границе волновода обращаются в ноль):

$$[E, n]_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

где  $n$  – единичная нормаль к поверхности волновода  $\Gamma$  – металлическая поверхность волновода.

Запишем для каждой из зон уравнения для полей отдельно.

Уравнения Максвелла для «зоны расширений»:

$$\text{rot}H^{-}(\rho, z) = -i\omega\varepsilon_q^{-}E^{-}(\rho, z), \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (w_{-}a_q, w_{-}b_q), \quad q = 1, \dots, m$$

$$\text{rot}E^{-}(\rho, z) = i\omega\mu H^{-}(\rho, z), \quad \rho \in (0, R), \quad z \in \bigcup_{q=1}^m (w_{-}a_q, w_{-}b_q)$$

здесь константа  $\varepsilon_q^{-}$  – диэлектрическая проницаемость среды в расширениях, при чем в каждом из расширений можно задать свое значение, и  $\mu$  – магнитная проницаемость, которая во всех расширениях постоянна.

Граничное условие в «зоне расширений» принимает вид:

$$E_z^{-}(R_q, z) = E_{\phi}^{-}(R_q, z) = 0, \quad z \in (w_{-}a_q, w_{-}b_q), \quad q = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$E_{\phi}^{-}(\rho, w_{-}a_q) = E_{\phi}^{-}(\rho, w_{-}b_q) = 0, \quad \rho \in (R, R_q), \quad q = 1, \dots, m \quad (6)$$

А в «рабочей зоне» уравнения Максвелла имеют вид:

$$\text{rot}H^{\text{полн}}(\rho, z) = -i\omega\varepsilon^{+}E^{\text{полн}}(\rho, z), \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (-\infty, \infty)$$

$$\text{rot}E^{\text{полн}}(\rho, z) = i\omega\mu H^{\text{полн}}(\rho, z), \quad \rho \in (0, R), \quad z \in (-\infty, \infty)$$

где константа  $\varepsilon^{+}$  – диэлектрическая проницаемость среды в рабочей зоне. И  $\mu$  – магнитная проницаемость, которая совпадает со значением в расширениях.

Граничное условие в «рабочей зоне» принимает вид:

$$E_z^{\text{полн}}(R, z) = E_{\phi}^{\text{полн}}(R, z) = 0, \quad z \in CL \quad (7)$$

Запишем условия сопряжения на пересечении замыканий «рабочей зоны» и «зоны расширений»:

$$H_{\phi}^{+}(R, z) + H_{0\phi}(R, z) = H_{\phi}^{-}(R, z) \quad (8)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{+}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{+}) = \frac{1}{\varepsilon^{-}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{-}) \quad (9)$$

$$E_{\phi}^{+}(R, z) = E_{\phi}^{-}(R, z) \quad (10)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi}^{+}) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{0\phi}) + H_{0z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_{\phi}^{-}) \quad (11)$$

## 2. Вывод сингулярных интегральных уравнений.

Введем в рассмотрение две неизвестные функции:

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z} E_{\phi}^{+}(R, z) \quad (12)$$

$$h(z) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{+})(R, z) \quad (13)$$

В силу условия сопряжения (10) и граничного условия (7) функция  $g(z)$  обладает следующими свойствами:

$$g(z) = \frac{\partial}{\partial z} E_{\phi}^{-}(R, z), \quad z \in L_q \quad (14)$$

$$g(z) = 0, \quad z \in CL \quad (15)$$

$$\int_{L_q} g(\xi) d\xi = 0, \quad q = 1, \dots, m \quad (16)$$

и в силу условия сопряжения (9) и граничного условия (7) функция  $h(z)$  обладает следующими свойствами:

$$h(z) = \frac{\varepsilon_q^+}{\varepsilon^- R} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_{\phi}^{-})(R, z), \quad z \in L_q \quad (17)$$

$$h(z) = 0, \quad z \in CL \quad (18)$$

В «рабочей зоне» для компонент полей  $E_{\phi}^+(\rho, z)$  и  $H_{\phi}^+(\rho, z)$  можно провести рассуждения проведенные в [2] и получить их выражения через неизвестные функции  $g(z)$  и  $h(z)$  в раскрытие патрубки.

Запишем представление Фурье компоненты  $E_{\phi}^+(\rho, z)$  электрического поля в «рабочей зоне»:

$$E_{\phi, \delta}^+(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{\phi}^+(\lambda) \frac{(-i)I_1(\gamma_{\delta}^+ \rho)}{\lambda I_1(\gamma_{\delta}^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (19)$$

где  $\gamma_{\delta}^+ = \sqrt{\lambda^2 - (k_{\delta}^+)^2}$ ,  $k_{\delta}^+ = k^+ + i\delta$ ,  $0 < \delta \ll k^+$ .

а  $C_{\phi}^+(\lambda)$  - преобразование Фурье функции  $g(z)$ :

$$C_{\phi}^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_L g(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi$$

В [2] проведен придельный переход по  $\delta$  в интеграле (19) в результате чего имеем

$$E_{\phi}^+(\rho, z) = \lim_{\delta \downarrow 0} E_{\phi, \delta}^+(\rho, z) = -i \int_{\Gamma_{\delta}^{(1)}} C_{\phi}^+(\lambda) \frac{(-i)I_1(\gamma^+ \rho)}{\lambda I_1(\gamma^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (20)$$

где  $\gamma^+ = \sqrt{\lambda^2 - (k^+)^2}$ ,  $\Gamma_{\delta}^{(1)}$  - контур обхода полюсов, подынтегральной функции, лежащих на вещественной оси.

Используя асимптотическое разложение:

$$\frac{\gamma^+ I_1'(\gamma^+ R)}{\lambda I_1(\gamma^+ R)} = \frac{|\lambda|}{\lambda} - \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda} + \underline{O}(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

И параметрическое представление для сингулярного интегрального оператора получаем [3]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} E_{\phi}^+(R, z) = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2R} \int_{\text{int}_{-a_q}}^z g(\xi) d\xi -$$

$$- \int_L g(\xi) K_0^E(z - \xi) d\xi, \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \quad (21)$$

$$\text{где } K_0^E(y) = \int_0^\infty \left[ \lambda - \frac{1}{2R} - \frac{\gamma^+ I_1(\gamma^+ R)}{I_1(\gamma^+ R)} \right] \frac{\sin \lambda y}{\lambda} d\lambda + \frac{\pi i}{R^3} \sum_{n=1}^{N_1} \frac{J_{1,n}^2}{\lambda_{1,n}^2} \sin(\lambda_{1,n} y)$$

Аналогично выводим представление для компоненты  $H_\phi^+(\rho, z)$  магнитного поля в «рабочей зоне».

$$H_{\phi,\delta}^+(\rho, z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{B_\phi^+(\lambda) I_1(\gamma_\delta^+ \rho)}{\gamma_\delta^+ I_0(\gamma_\delta^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (22)$$

где  $B_\phi^+(\lambda)$  - преобразование Фурье функции  $h(z)$ :

$$B_\phi^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_L h(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi$$

В интеграле (22) можно перейти к пределу по  $\delta$  [2]:

$$H_\phi^+(\rho, z) = \lim_{\delta \downarrow 0} H_{\phi,\delta}^+(\rho, z) = \int_{\Gamma_\delta^{(0)}} \frac{B_\phi^+(\lambda) I_1(\gamma^+ \rho)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} e^{i\lambda z} d\lambda \quad (23)$$

где  $\Gamma_\delta^{(0)}$  контур обхода полюсов, подынтегральной функции, лежащих на вещественной оси.

Имеет место асимптотическое разложение:

$$\frac{\lambda I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} = \frac{|\lambda|}{\lambda} - \frac{1}{2R\gamma^+} \frac{|\lambda|}{\lambda} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

Используя асимптотическое разложение и параметрическое представление сингулярного интегрального оператора получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} H_\phi^+(R, z) &= \frac{1}{\pi} \int_L \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2R} \int_{\text{int}_{-a_q}}^z h(\xi) d\xi + \frac{1}{4R} \sum_{p=1}^{q-1} \int_{L_p} h(\xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{4R} \sum_{p=q}^m \int_{L_p} h(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L h(\xi) K_0^H(z - \xi) d\xi, \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{где } K_0^H(y) = \int_0^\infty \left[ \lambda - \frac{1}{2R\lambda} - \frac{\lambda I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} \right] \sin \lambda y d\lambda + \frac{\pi i}{R} \sum_{n=1}^{N_0} \sin(\lambda_{0,n} y)$$

Получим представления компонент электрического и магнитного поля в «зоне расширений» через неизвестные функции.

Компоненту  $E_\phi^{-(q)}(\rho, z)$  электрического поля в расширениях ищем в виде:

$$E_\phi^{-(q)}(\rho, z) = \sum_{n=1}^\infty V_n^{(q)E}(\rho) C_{\phi,n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) \quad (25)$$

$$\text{где } V_n^{(q)E}(\rho) = \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \frac{K_1(\gamma_n^{-(q)} R_q) I_1(\gamma_n^{-(q)} \rho) - I_1(\gamma_n^{-(q)} R_q) K_1(\gamma_n^{-(q)} \rho)}{K_1(\gamma_n^{-(q)} R_q) I_1(\gamma_n^{-(q)} R) - I_1(\gamma_n^{-(q)} R_q) K_1(\gamma_n^{-(q)} R)},$$

$$\text{И } \gamma_n^{-(q)} = \gamma^-(\lambda_n^{(q)}) = \sqrt{(\lambda_n^{(q)})^2 - (k_q^-)^2}$$

Используя асимптотическую оценку:

$$\frac{d}{d\rho} V_n^{(q)E}(R) = -1 - \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty \quad (26)$$

преобразуем (25) с учетом (26) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} E_\phi^{-(q)}(R, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi, n}^{-(q)} \frac{d}{d\rho} V_n^{(q)E}(R) \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) - \frac{1}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi, n}^{-(q)} \left[ \frac{d}{d\rho} V_n^{(q)E}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) \end{aligned} \quad (27)$$

Известно, что интегральный оператор:

$$(H_q W)(z) = \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) \int_{w_{-a_q}}^{w_{-b_q}} \frac{W(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - w_{-a_q})} d\xi \quad (28)$$

действует на базисные элементы следующим образом [3]:

$$H_q : \cos \lambda_n^{(q)}(\xi - a_q) \rightarrow -\sin \lambda_n^{(q)}(z - a_q), \quad \xi, z \in L_q, \quad n = 1, 2, \dots$$

Используя свойство (15) функции  $g(z)$ , получаем выражение для первого ряда в (27)

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty} C_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) &= \\ &= \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} \frac{g(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - w_{-a_q})} d\xi \end{aligned}$$

Так как  $E_\phi^{-(q)}(R, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) = \int_{w_{-a_q}}^z g(\xi) d\xi$ , то для второго

интеграла, используя свойство (15), в (27) получаем

$$-\frac{1}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) = \frac{1}{2R} \int_{\text{int}_{-a_q}}^z g(\xi) d\xi$$

Для коэффициентов Фурье функции  $\frac{\partial}{\partial z} E_\phi^{-(q)}(R, z)$  имеем:

$$C_{\phi, n}^{-(q)} = \frac{2}{l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} g(\xi) \cos \lambda_n^{(q)}(\xi - w_{-a_q}) d\xi$$

Окончательно для (27) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} E_{\phi}^{-(q)}(R, z) = & -\frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) * \\ & * \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} \frac{g(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - w_{-a_q})} d\xi - \frac{1}{2R} \int_{\text{int}_{-a_q}}^z g(\xi) d\xi + \\ & + \frac{2}{l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} g(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lambda_n^{(q)} V_n^{(q)E}(R) + 1 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)} (z - w_{-a_q}) \cos \lambda_n^{(q)} (\xi - w_{-a_q}) d\xi \end{aligned} \quad (29)$$

Компоненту  $H_{\phi}^{-(q)}(\rho, z)$  магнитного поля в расширениях ищем в виде:

$$H_{\phi}^{-(q)}(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(q)H}(\rho) B_{\phi, n}^{-(q)} \cos \lambda_n^{(q)} (z - w_{-a_q}) \quad (30)$$

где  $V_n^{(q)H}(\rho) = \frac{1}{\gamma_n^{-(q)}} \frac{K_0(\gamma_n^{-(q)} R_q) I_1(\gamma_n^{-(q)} \rho) - I_0(\gamma_n^{-(q)} R_q) K_1(\gamma_n^{-(q)} \rho)}{K_0(\gamma_n^{-(q)} R_q) I_0(\gamma_n^{-(q)} R) - I_0(\gamma_n^{-(q)} R_q) K_0(\gamma_n^{-(q)} R)}$

Используя асимптотическую оценку:

$$-\lambda_n^{(q)} V_n^{(q)H}(R) = 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} H_{\phi}^{-(q)}(R, z) = & -\sum_{n=1}^{\infty} B_{\phi, n}^{-(q)} \lambda_n^{(q)} V_n^{(q)H}(R) \sin \lambda_n^{(q)} (z - w_{-a_q}) = \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} B_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)} (z - w_{-a_q}) + \frac{1}{2R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\phi, n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)} (z - w_{-a_q}) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} B_{\phi, n}^{-(q)} \left[ \lambda_n^{(q)} V_n^{(q)H}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)} (z - w_{-a_q}) \end{aligned} \quad (31)$$

Используя свойства интегрального оператора  $(H_q W)(z)$  (28) и свойство (18) функции  $h(z)$  для первого ряда в (31) имеем

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{\infty} B_{\phi, n}^{-(q)} \sin \lambda_n^{(q)} (z - w_{-a_q}) = \\ = \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} \frac{h(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - w_{-a_q})} d\xi \end{aligned}$$

Так как  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \text{sign}(\theta) \frac{1}{2} (\pi - |\theta|)$ ,  $0 < |\theta| < 2\pi$ , то

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{\phi,n}^{-(q)}}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) = \\
& = \frac{2}{l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} h(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) \cos \lambda_n^{(q)}(\xi - w_{-a_q}) d\xi = \\
& = \frac{1}{l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} h(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} (\sin \lambda_n^{(q)}(z - \xi) + \sin \lambda_n^{(q)}(z + \xi - 2w_{-a_q})) d\xi = \\
& = \frac{1}{2l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} h(\xi) [l_q - z - \xi + 2w_{-a_q} + \text{sign}(z - \xi)(l_q - |z - \xi|)] d\xi = \\
& = \int_{\text{int}_{-a_q}}^z h(\xi) d\xi - \frac{z - w_{-a_q}}{l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} h(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

Для коэффициентов Фурье функции  $\frac{\partial}{\partial \rho} H_{\phi}^{-(q)}(R, z)$  имеем:

$$B_{\phi,n}^{-(q)} = \frac{2}{l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} h(\xi) \cos \lambda_n^{(q)}(\xi - w_{-a_q}) d\xi$$

Используя выражения для коэффициентов Фурье функции  $\frac{\partial}{\partial z} H_{\phi}^{-(q)}(R, z)$  и свойство (18) функции  $h(z)$ , окончательно, получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} H_{\phi}^{-(q)}(R, z) = \\
& = -\frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon_q^+} \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} \frac{h(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - w_{-a_q})} d\xi + \\
& + \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon_q^+} \frac{1}{2R} \int_{\text{int}_{-a_q}}^z h(\xi) d\xi - \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon_q^+} \frac{1}{2R} \frac{z - w_{-a_q}}{l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} h(\xi) d\xi - \\
& - \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon_q^+} \frac{2}{l_q} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} h(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda_n^{(q)} V_n^{(q)H}(R) + 1 + \\
& \quad + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}}] \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_{-a_q}) \cos \lambda_n^{(q)}(\xi - w_{-a_q}) d\xi \quad (32)
\end{aligned}$$

Для того чтобы выполнялись условия Майкснера на ребрах функции ищем в виде:

$$h(z) = \begin{cases} 0, & z \in CL \\ \frac{w_q(z)}{\sqrt{(z - \text{int}_{-a_q})(\text{int}_{-b_q} - z)}}, & z \in L_q \end{cases}$$

где  $w_q(\xi)$  - неизвестная, гладкая функция.

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \in CL \\ \frac{v_q(z)}{\sqrt{(z - \text{int}_{-a_q})(\text{int}_{-b_q} - z)}}, & z \in L_q \end{cases}$$

где  $v_q(\xi)$  - неизвестная, гладкая функция.

В результате подстановки выражений (21), (29) в условие сопряжения (11), получаем сингулярные интегральные уравнения для неизвестной функции  $w_q(\xi)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} \frac{w_q(\xi)}{\xi - z} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_{-a_q})(\text{int}_{-b_q} - \xi)}} + \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+ l_q} \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) * \\ & * \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} \frac{w_q(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - w_{-a_q}) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - w_{-a_q})} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_{-a_q})(\text{int}_{-b_q} - \xi)}} + \\ & + \left( 1 - \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+} \right) \frac{1}{2R} \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} w_q(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_{-a_q})(\text{int}_{-b_q} - \xi)}} + \\ & + \sum_{p=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{\text{int}_{-a_p}}^{\text{int}_{-b_p}} K_{qp}^H(z, \xi) w_p(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_{-a_q})(\text{int}_{-b_q} - \xi)}} = \\ & = - \frac{\partial}{\partial z} H_{0\phi}(R, z), \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} K_{qp}^H(z, \xi) &= \frac{1}{\xi - z} + K_0^H(z - \xi) + \frac{\pi}{4R}, \quad p < q \\ K_{qp}^H(z, \xi) &= \frac{1}{\xi - z} + K_0^H(z - \xi) - \frac{\pi}{4R}, \quad p > q \\ K_{qq}^H(z, \xi) &= K_0^H(z - \xi) + \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+} \frac{\pi}{2R} \frac{z - w_{-a_q}}{l_q} - \frac{\pi}{4R} + \\ & + \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon^+} \frac{2\pi}{l_q} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lambda_n^{(q)} V_n^{(q)}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)} (z - w_{-a_q}) \cos \lambda_n^{(q)} (\xi - w_{-a_q}) \end{aligned}$$

с дополнительным условием

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{\text{int}_{-a_p}}^{\text{int}_{-b_p}} F_q(\xi) w_p(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_{-a_q})(\text{int}_{-b_q} - \xi)}} + \\ & + V_0^{(q)H}(R) \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} w_q(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_{-a_q})(\text{int}_{-b_q} - \xi)}} = \int_{\text{int}_{-a_q}}^{\text{int}_{-b_q}} H_{0\phi}(R, \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $q = 1, \dots, m$



И

$$F_q^H(\xi) = \int_0^\infty \frac{I_1(\gamma^+ R)}{\gamma^+ I_0(\gamma^+ R)} \frac{\sin \lambda(\text{int}_- a_q - \xi) - \sin \lambda(\text{int}_- b_q - \xi)}{\lambda} d\lambda + \\ + \frac{\pi}{R} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{\sin \lambda_{0,n}^+(\text{int}_- a_q - \xi) - \sin \lambda_{0,n}^+(\text{int}_- b_q - \xi)}{(\lambda_{0,n}^+)^2}$$

В результате подстановки выражений (24), (32) в условие сопряжения (8), получаем сингулярные интегральные уравнения для неизвестной функции  $v_q(\xi)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{\text{int}_- a_q}^{\text{int}_- b_q} v_q(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z \sqrt{(\xi - \text{int}_- a_q)(\text{int}_- b_q - \xi)}} + \frac{1}{l_q} \sin \frac{\pi}{l_q} (z - w_- a_q) * \\ * \int_{\text{int}_- a_q}^{\text{int}_- b_q} \frac{v_q(\xi)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z - w_- a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi - w_- a_q)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_- a_q)(\text{int}_- b_q - \xi)}} + \\ + \sum_{p=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{\text{int}_- a_p}^{\text{int}_- b_p} K_{qp}^E(z, \xi) v_p(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_- a_p)(\text{int}_- b_p - \xi)}} = \\ = H_{0z}(R, z) + \frac{\partial}{\partial \rho} E_{0\phi}(R, z) \quad z \in L_q, \quad q = 1, \dots, m \quad (35)$$

где

$$K_{qp}^E(z, \xi) = \frac{1}{\xi - z} + K_0^E(z - \xi), \quad q \neq p \\ K_{qq}^E(z, \xi) = K_0^E(z - \xi) + \\ + \frac{2\pi}{l_q} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{dV_n^{(q)}}{d\rho}(R) + 1 + \frac{1}{2R} \frac{1}{\lambda_n^{(q)}} \right] \sin \lambda_n^{(q)}(z - w_- a_q) \cos \lambda_n^{(q)}(\xi - w_- a_q)$$

и дополнительные условия

$$\frac{1}{\pi} \int_{\text{int}_- a_q}^{\text{int}_- b_q} v_q(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \text{int}_- a_q)(\text{int}_- b_q - \xi)}} = 0, \quad q = 1, \dots, m \quad (36)$$

### 3. Дискретная математическая модель.

Используя линейные замены переменных в интегралах переходим от  $L_q$  к интервалу  $(-1, 1)$ . Дискретизацию проводим по методу дискретных особенностей. Заменяя неизвестные функции и ядра их интерполяционными полиномами ищем приближенные решения задачи. Выбирая в качестве точек интерполяции нули полиномов Чебышева I рода, а для точек коллокации нули полиномов Чебышева II рода и используя квадратурные формулы интерполяционного типа к системам интегральных уравнений, сводим их к системам линейных алгебраических уравнений.

В соответствии с выше сказанным, приближенные значения решений системы СИУ (35) с дополнительными условиями (36)  $v_q^{(n_q)}(\xi)$  в точках

$$\xi_{q,k}^{(n_q)} = \frac{l_q}{2} t_k^{(1,n_q)} + \frac{\text{int}_- b_q + \text{int}_- a_q}{2}, \quad k=1, \dots, n_q, \quad q=1, \dots, m \text{ ищем из СЛАУ:}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \left[ \frac{1}{\xi_{q,k}^{(n_q)} - z_{q,j}^{(n_q)}} + \frac{\pi}{l_q} \frac{\sin \frac{\pi}{l_q} (z_{q,j}^{(n_q)} - w_- a_q)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z_{q,j}^{(n_q)} - w_- a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi_{q,k}^{(n_q)} - w_- a_q)} \right] v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} K_{qq}^E(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{q,k}^{(n_q)}) v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} K_{qp}^E(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{p,k}^{(n_p)}) v_p^{(n_p)}(\xi_{p,k}^{(n_p)}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial z} H_{0\phi}(R, z_{q,j}^{(n_q)}), \quad j=1, \dots, n_q, \quad q=1, \dots, m \end{aligned} \quad (37)$$

С дополнительным условием:

$$\frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) = 0, \quad q=1, \dots, m \quad (38)$$

где  $z_{q,j}^{(n_q)} = \frac{l_q}{2} t_j^{(2,n_q)} + \frac{\text{int}_- b_q + \text{int}_- a_q}{2}, \quad j=1, \dots, n_q - 1, \quad q=1, \dots, m$

А приближенные значения решений системы СИУ (33) с дополнительными условиями (34)  $w_q^{(n_q)}(\xi)$  ищем из СЛАУ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \frac{1}{\xi_{q,k}^{(n_q)} - z_{q,j}^{(n_q)}} w_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon_q^+} \frac{\pi}{l_q} \frac{\sin \frac{\pi}{l_q} (z_{q,j}^{(n_q)} - w_- a_q)}{\cos \frac{\pi}{l_q} (z_{q,j}^{(n_q)} - w_- a_q) - \cos \frac{\pi}{l_q} (\xi_{q,k}^{(n_q)} - w_- a_q)} w_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} K_{qq}^H(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{q,k}^{(n_q)}) v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \left( 1 - \frac{\varepsilon_q^-}{\varepsilon_q^+} \right) \frac{1}{2R} \frac{\pi}{n_q} * \\ & * \sum_{k=1}^{n_q} \left[ \pi - \arccos z_{q,j}^{(n_q)} - 2 \sum_{s=1}^{n_q-1} \frac{T_s(\xi_{q,k}^{(n_q)})}{s} U_{s-1}(z_{q,j}^{(n_q)}) \sqrt{1 - z_{q,j}^{(n_q)}} \right] v_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \\ & + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} K_{qp}^H(z_{q,j}^{(n_q)}, \xi_{p,k}^{(n_p)}) v_p^{(n_p)}(\xi_{p,k}^{(n_p)}) = \\ & = H_{0z}(R, z_{q,j}^{(n_q)}) + \frac{\partial}{\partial \rho} E_{0\phi}(R, z_{q,j}^{(n_q)}), \quad j=1, \dots, n_q, \quad q=1, \dots, m \end{aligned} \quad (39)$$

С дополнительным условием:

$$\frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} \left[ F_q^H(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \pi V_0^{(q)H}(R) \right] \nu_q^{(n_q)}(\xi_{q,k}^{(n_q)}) + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} F_p^H(\xi_{p,k}^{(n_p)}) \nu_p^{(n_p)}(\xi_{p,k}^{(n_p)}) = \int_{\text{int\_}a_q}^{\text{int\_}b_q} H_{0\phi}(R, \xi) d\xi, \quad q=1, \dots, m \quad (40)$$

#### 4. Численный эксперимент.

Был проведен численный эксперимент с использованием СЛАУ (37-40). В ходе эксперимента были построены поля в разрезах патрубков. Полученные результаты показали устойчивость метода, а так же хорошую сходимость приближенного решения к точному.

Для иллюстрации рассмотрим задачу дифракции в цилиндрическом волноводе с одним патрубком при следующих значениях параметров  $R=1$ ,  $h=1$ ,  $w_a=0$ ,  $w_b=1$ . На рис. 2-4 изображена  $E_\phi(z, R)$  компонента электрического поля в разрезе патрубков с различной диэлектрической проницаемостью среды полученные при  $n=30$ .

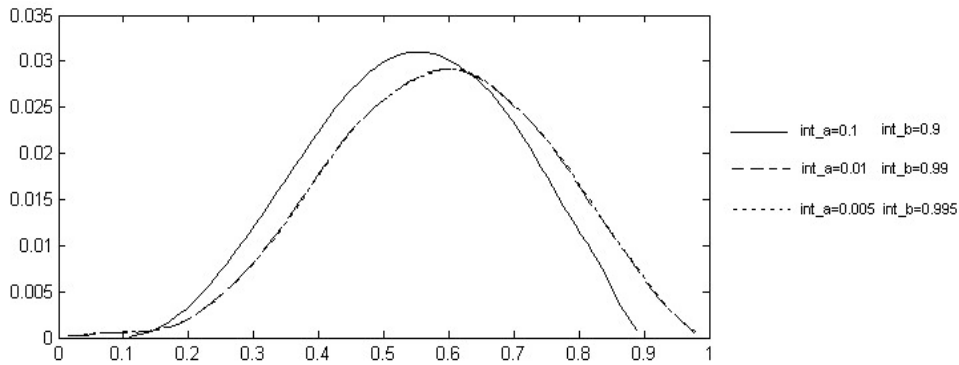


Рис. 2  $E_\phi(z, R)$  при  $\varepsilon^+ = 4$   $\varepsilon^- = 4$

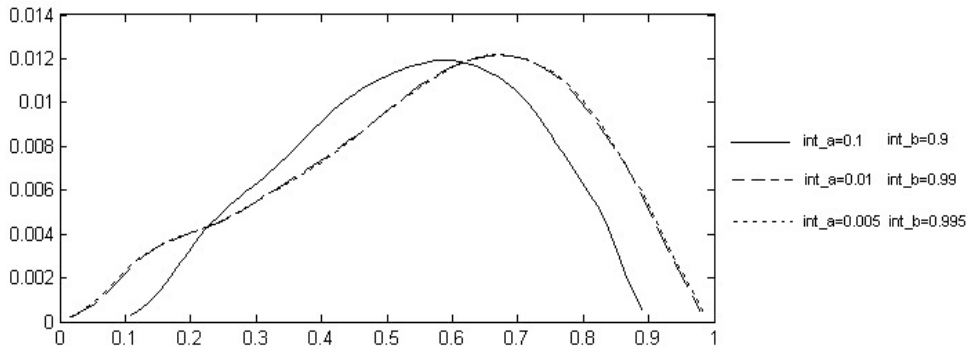


Рис. 3  $E_\phi(z, R)$  при  $\varepsilon^+ = 4$   $\varepsilon^- = 5$

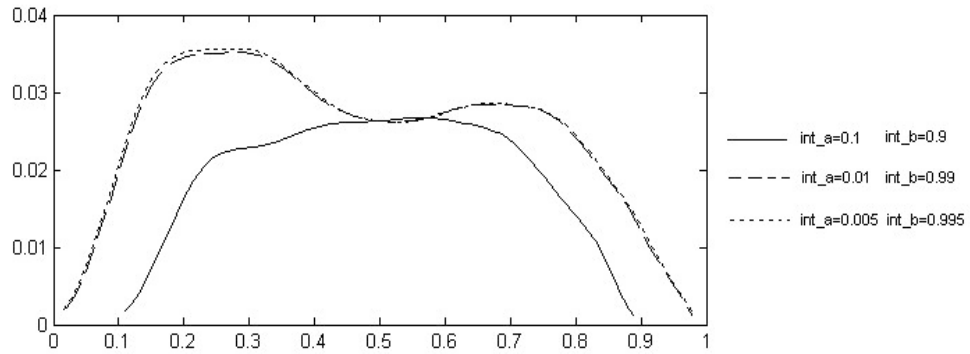


Рис. 4  $E_\phi(z, R)$  при  $\varepsilon^+ = 5$   $\varepsilon^- = 5$

Результаты численных экспериментов в простейшем случае (один патрубков и отсутствие диэлектрика) совпадают с результатами полученными Яшиной методом полуобращения [4].

Полученные результаты, в ходе численного эксперимента, подтверждают обоснованность представления неизвестных функций для задач с расширениями [1,2] в виде:

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \in CL \\ \frac{w(z)}{\sqrt{(z-a)(b-z)}}, & z \in L \end{cases}$$

где  $w(z)$  - гладкая функция,  $a, b$  - края расширения.

Такое представление обеспечивает выполнение условия Майкснера, так как начиная с некоторого значения выступа патрубков и при дальнейшем его уменьшении вид поля не меняется.

Автор благодарен профессору Ю.В. Ганделю за постановку задачи и интерес к работе

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю.В., Стешенко С.А Математические модели некоторых аксиально-симметричных задач волноводной дифракции. Электромагнитные волны и электронные системы, №6, т.7, 2002 с.12-31.
2. Духопельников С.В. Математическая модель для расчета гофрированного волновода на базе сингулярных интегральных уравнений и метода дискретных особенностей.// Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» №733, в. 6 Харків – 2006, – с.117-133.
3. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Уч. пособие, ч.1. Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков-Херсон, 2000.–92 с.
4. Яшина Н.П. Проходной цилиндрический резонатор с подстроечными патрубками. Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых волн: сб. науч. тр. /Редкол. Шестопапов В.П.(отв. ред) и др. – Киев: Наук. думка, 1986 с.52-59.