

Нахождение комплексных собственных значений задачи Штурма-Лиувилля, которая возникает при решении задач дифракции

В. Д. Душкин

Академия ВВ МВСУ, Украина

The properties of complex roots of Sturm-Liouville characteristic equation have been discussed. This equation corresponded to the problem of E-polarized electromagnetic waves diffraction in the case of surface impedance consideration.

1. Постановка задачи и её актуальность.

К проблеме, которая рассматривается в работе, приводит задача численного моделирования дифракционных полей на полупрозрачных двумерных неперриодических решетках, содержащих прямоугольные волноводные каналы, в случае учета поверхностного импеданса полей (см. рис. 1). Условия Леонтовича на поверхности структуры приводят в случае E-поляризации к граничному условию для компоненты поля E_x :

$$\frac{\partial}{\partial n} E_x - \hbar_E \cdot E_x = 0, \quad \hbar_E = \frac{i\omega\mu_0\mu}{Z_s}, \quad \Re(\hbar_E) > 0 \quad \text{Im}(\hbar_E) > 0, \quad (1)$$

а в случае H-поляризации к граничному условию для компоненты поля H_x :

$$\frac{\partial}{\partial n} H_x - \hbar_H \cdot H_x = 0, \quad \hbar_H = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \cdot Z_s, \quad \Re(\hbar_H) < 0 \quad \text{Im}(\hbar_H) > 0 \quad (2)$$

(значения величин даны в системе СИ).

В статье будет использоваться обозначение \hbar , которое используется в случае, когда формулы справедливы для величин \hbar_E и \hbar_H одновременно.

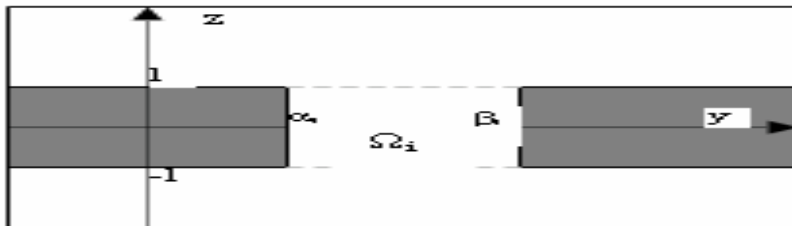


Рис.1. Вид структуры

В работах [1,2] был предложен алгоритм численного моделирования дифракционных полей, которые были описаны выше. Для реализации этого

алгоритма необходимо найти комплексные корни характеристического уравнения задачи Штурма – Лиувилля :

$$(\hbar^2 - \lambda) \sin(\sqrt{\lambda} \cdot (\beta - \alpha)) + 2\hbar\sqrt{\lambda} \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot (\beta - \alpha)) = 0, \quad (3)$$

$$\lambda \in C_\lambda = \{z \in C, (\Re(z) > 0) \cup (\Re(z) = 0 \wedge \Im(z) > 0)\}. \quad (4)$$

После введения величин

$$\theta = (\beta - \alpha)/\pi, \quad h = \hbar \cdot \theta, \quad z = \theta \cdot \sqrt{\lambda} \quad (5)$$

и несложных преобразований уравнение (3) примет вид:

$$\frac{z}{h} - \frac{h}{z} = 2 \cdot \operatorname{ctg}(\pi \cdot z) \quad (6)$$

Нас будет интересовать диапазон частот, в котором ширина волноводного канала равняется нескольким длинам волн: $0.1 \leq (\beta - \alpha)/\lambda = k\theta/2 = \partial\ell/2 \leq 10$.

В случае Е-поляризации $h_E = \hbar_E \cdot \theta = i\omega\mu_0\mu\theta \cdot Z_s^{-1} = i\partial\ell\mu_0\mu c \cdot Z_s^{-1}$ и величина h_E изменяется в пределах от 15 до $1.2 \cdot 10^5$. В случае Н-поляризации $h_H = \hbar_H \cdot \theta = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \cdot Z_s \cdot \theta = i\partial\ell \cdot \varepsilon_0\varepsilon \cdot Z_s \cdot c$ и величина h_H изменяется в пределах от 0 до $5 \cdot 10^{-2}$. Таким образом, для проведения численного моделирования полей на структурах, которые были описаны выше, представляет интерес способ нахождения корней уравнения (6) при больших и малых значениях комплексного параметра h .

2. Исследование свойств корней характеристического уравнения (6) и сужение области их поиска.

Пусть

$$h = |h| \cdot e^{i\beta}, \quad z = |z| \cdot e^{i\alpha}, \quad a = |z/h|, \quad \varphi = \beta - \alpha, \quad z = x + i \cdot y \quad (7)$$

Тогда для действительной и мнимой части уравнения (6) справедливы следующие равенства:

$$\left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot \cos(\varphi) = \frac{2 \cdot \sin(2\pi x)}{\operatorname{ch}(2\pi y) - \cos(2\pi x)} \quad (8)$$

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \sin(\varphi) = \frac{2 \cdot \operatorname{sh}(2\pi y)}{\operatorname{ch}(2\pi y) - \cos(2\pi x)} \quad (9)$$

Для корней уравнения (6) в области $|y| \geq M$ выполняются неравенства:

$$2 \cdot \operatorname{th}(\pi M) \leq \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot |\sin(\varphi)| \leq 2 \cdot \operatorname{cth}(\pi M) \quad (10)$$

$$\left|a - \frac{1}{a}\right| \cdot |\cos \varphi| \leq \frac{2}{\operatorname{sh}(2\pi y)} \quad (11)$$

Анализ уравнения (12) с учетом (6,8) показывает, что в случае Е-поляризации область возможного нахождения корней ограничена по φ :

$$0 \leq \varphi \leq \beta < \pi/2. \quad (12)$$

Численный и аналитический анализ неравенств (13-14) показывает, что в случае Е-поляризации, для любого значения M существуют такие значения a_M и φ_M , что при $|\operatorname{Im} z| > M$ решения системы (13-14) находятся внутри ограниченной области:

$$\varphi_M \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad a_M \leq a \leq \frac{1}{a_M}. \quad (13)$$

Для значения $M = 0,317$ вид этой области приведен на рисунке 2.

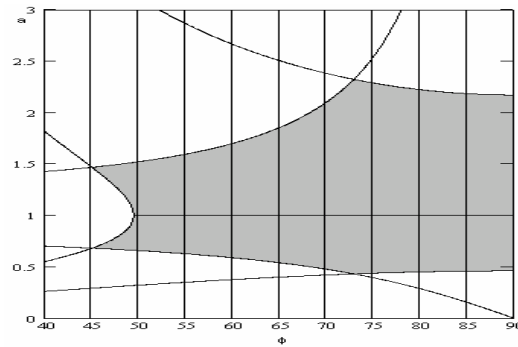


Рис.2. Решение системы (10-11) в случае $|\operatorname{Im} z| > M = 0,317$, Е-поляризация.

Так как $\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi_M = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi < \beta < \frac{\pi}{2}$, для любого β существует такое значение

M , что области $|\operatorname{Im}(z)| > M$ у уравнения (6) не будет корней. В случаях интересных для практики $\beta \leq \pi/4$, следовательно, в случае Е-поляризации все корни уравнения (6) находятся к области $|\operatorname{Im}(z)| \leq 0,317$.

В случае Н-поляризации корни уравнения (6) находятся внутри сектора $0 < \beta - \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \beta + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$ и решения системы неравенств (10-11) при каждом значении M находится внутри ограниченной области. Вид области возможного нахождения решений системы неравенств (10-11) в координатах (φ, a) в случае $M = 0.19$ заполнен на рисунке 3 темным цветом. Несложно проверить, что в случае Н-поляризации, при выполнении условия $h_H \leq 0.05$, все корни уравнения (6) удовлетворяют неравенству $|\operatorname{Im}(z)| < 0.19$.

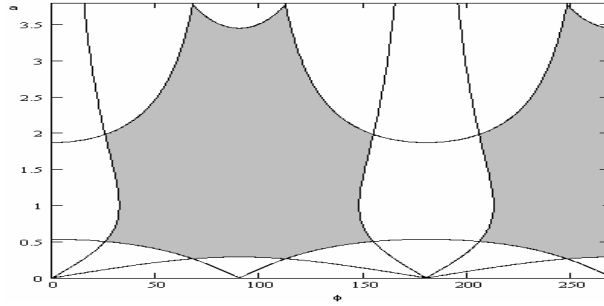


Рис.3. Решение системы (10-11) в случае $|\text{Im}(z)| > M=0.19$, H-поляризация.

3. Нахождение областей единственности корней уравнения (6).

Для построения процедуры численного нахождения корней уравнения (6) представляет интерес вопрос об их количестве на периоде функции $\text{ctg}(\pi \cdot z)$. Преобразуем уравнение (6) к виду:

$$\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \sin(\pi \cdot z) + 2 \frac{z}{h} \cdot \cos(\pi \cdot z) = 0 \tag{14}$$

Введем обозначения $f(z) = \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \sin(\pi \cdot z)$, $g(z) = 2 \frac{z}{h} \cdot \cos(\pi \cdot z)$,

$$\Omega_n^s = \{z \mid |\text{Im}(z)| \leq M \wedge n - 0.5 \leq \text{Re}(z) \leq n + 0.5\} \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

Функция $f(z)$ имеет в каждой области Ω_n^s единственный корень, если значение $z = h$ не принадлежит этой области. Согласно теореме Руше, для единственности корня уравнения в Ω_n^s достаточно выполнения условия:

$$|f(z)| \geq |1 - a^2| \cdot |\sin(\pi \cdot z)| > 2a |\cos(\pi \cdot z)| = 2 \left| \frac{z}{h} \right| \cdot \cos(\pi \cdot z) = |g(z)|. \tag{15}$$

На границах областей Ω_n^s выполняется неравенство $|\sin(\pi \cdot z)| \geq |\cos(\pi \cdot z)| \cdot \text{th}(\pi M)$ и следовательно условие (15) выполняется при

$$|1 - a^2| \cdot \text{th}(\pi M) > 2a \tag{16}$$

Решением неравенства (16) являются значения: $a \in \left(0, \sqrt{\text{cth}^2(\pi M) + 1} - \text{cth}(\pi M)\right) \cup \left(\sqrt{\text{cth}^2(\pi M) + 1} + \text{cth}(\pi M), \infty\right)$. В силу произвольности значения M получаем, что условия единственности выполняются для областей Ω_n^c , в каждой точке которой выполняются условия:

$$a \in \left(0, \sqrt{2} - 1\right) \cup \left(\sqrt{2} + 1, \infty\right). \tag{17}$$

Данное утверждение справедливо для обеих поляризаций, следствием его в случае Н-поляризации является существование и единственность корней уравнения в областях Ω_n^s в случае, когда $n \geq 1$.

В случае Н-поляризации, для всех точек области $\Omega_0^{[0,19;0,5]} = \{z \mid |\operatorname{Im}(z)| < 0,19 \wedge 0,19 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0,5\}$ выполняются неравенства $a > 1$ и $\cos(\varphi) < 0$. Эти неравенства показывают, что в области $\Omega_0^{[0,19;0,5]}$ корней уравнения (6) нет. На границе области $\Omega_0^s = \{z \mid |\operatorname{Im}(z)| \leq 0,19 \wedge |\operatorname{Re}(z)| \leq 0,19\}$ справедливы неравенства

$$\left| (h^2 - z^2) \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z} \right| \geq (|z|^2 - 0,05^2) \cdot \left| \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z} \right| > |2h \cdot \cos(\pi \cdot z)| \quad (18)$$

и следовательно, согласно теореме Руше, в области Ω_0^s уравнение (6) имеет, как и функция $z^{-1} \cdot (h^2 - z^2) \sin(\pi \cdot z)$, два корня. Функция, которая стоит в левой части уравнения, четна и значит в области $|z| \leq 0,19 \wedge \operatorname{Re}(z) > 0$ находится только один корень.

Исследуем, при каких значениях a в случае Е-поляризации в областях $\Omega_n^c = \{z \mid |\operatorname{Im}(z)| \leq M \wedge n \leq \operatorname{Re}(z) \leq n+1\}$, $n = 1, 2, \dots, \infty$ находится только один корень уравнения. Функция $g(z)$ имеет в каждой из областей Ω_n^c единственный корень. Для единственности корня уравнения в каждой из областей Ω_n^c достаточно выполнения условия

$$|f(z)| = |1 - a^2 \cdot e^{2i\varphi}| \cdot |\sin(\pi \cdot z)| < 2a |\cos(\pi \cdot z)| = 2 \left| \frac{z}{h} \right| \cdot \cos(\pi \cdot z) = |g(z)|. \quad (19)$$

Пусть $\varphi_n^M = \max \varphi$, $\varphi \in \Omega_n^c$. Так как

$$|1 - a^2 \cdot e^{2i\varphi}| = \sqrt{(1 - a^2 \cdot \cos(2\varphi))^2 + a^4 \cdot \sin^2(2\varphi)} = \sqrt{1 + a^4 - 2a^2 \cdot \cos(2\varphi)} \quad (20)$$

и на границах областей Ω_n^c выполняется неравенство $|\sin(\pi \cdot z)| \cdot th(\pi M) \leq |\cos(\pi \cdot z)|$, следовательно, условие (20) выполняется при

$$\max_{\varphi} \sqrt{1 + a^4 - 2a^2 \cdot \cos(2\varphi)} = \sqrt{1 + a^4 - 2a^2 \cdot \cos(2\varphi_n^M)} < 2a \cdot th^{-1}(\pi M). \quad (21)$$

Неравенство (23) справедливо, когда

$$a \in \left(\sqrt{2cth^2(\pi M) + \cos(2\varphi_n^M)} - \sqrt{(2cth^2(\pi M) + \cos(2\varphi_n^M))^2 - 1}, \sqrt{2cth^2(\pi M) + \cos(2\varphi_n^M)} + \sqrt{(2cth^2(\pi M) + \cos(2\varphi_n^M))^2 - 1} \right). \quad (22)$$

В силу свойств величин Z_s справедливо неравенство $\arg(h_E) = \beta \leq \pi/4$. Рассмотрим случай, когда $|\operatorname{Im}(z)| < M = 0.317$ и $a \geq \sqrt{2} - 1 > 0,4$. В этом случае $\forall z \in \Omega_n^c \quad |\arg(z)| < \varepsilon = \operatorname{arctg}(0.317/(0.4 \cdot h))$. В случае $h = 15$ величина $\varepsilon = 0.053(\text{rad})$. Тогда в областях Ω_n^c выполнено условие $\varphi_n^M = \beta - \arg(z) \leq \pi/4 + \varepsilon$. В этом случае из (22) получаем, что условия единственности выполняются для областей Ω_n^c , в каждой точке которой выполняются условия $a \in (0.391, 2.563)$. Полученный результат с учетом (20) дает единственность корней уравнения (6) на периоде функций $\operatorname{ctg}(\pi \cdot z)$.

4. Численные значения корней.

На рисунках 4-5 представлены корни уравнения (3), в случае E-поляризации, при представляющих практический интерес значениях Z_s .

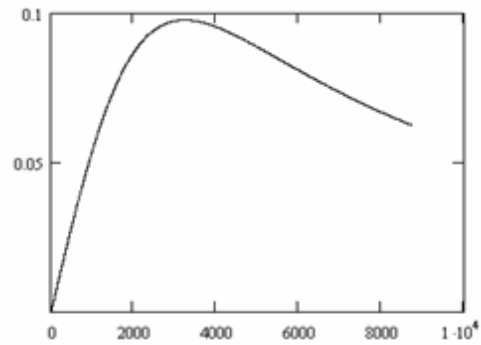
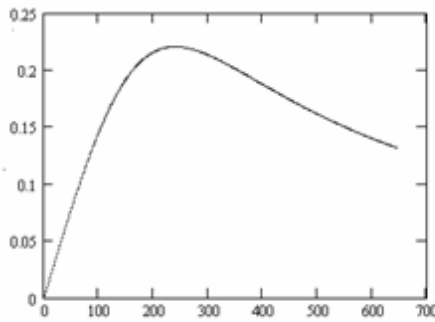


Рис.3. слева- $z=3.01+i*4.01 \quad \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 10$
справа- $Z=1.10491 \cdot 10^{-2} + i \cdot 3.54889 \cdot 10^{-2} \quad \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1$

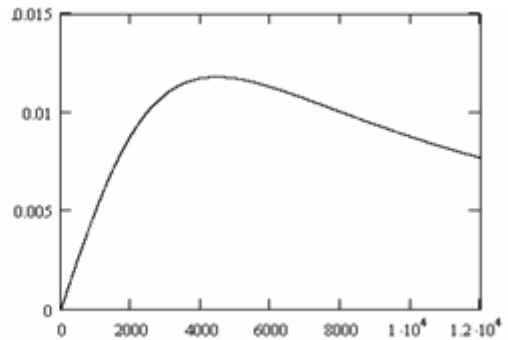
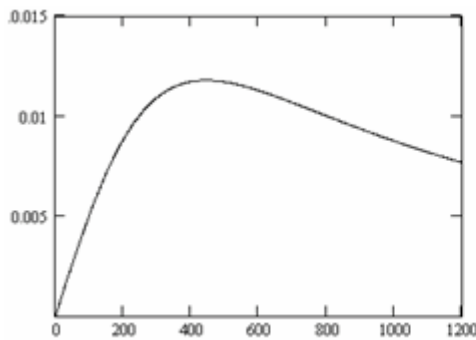


Рис.3. слева- $Z=1 \cdot 10^{-2} + i \cdot 27 \cdot 10^{-2} \quad \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1$
справа- $Z=1 \cdot 10^{-2} + i \cdot 27 \cdot 10^{-2} \quad \partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 10$

В таблице приведены корни уравнения (6), в случае Н-поляризации. Численный эксперимент показал малое отличие корней уравнения (6) от целых чисел в случае, если их модуль превышает 1.

Таблица 1 Корни характеристического уравнения. Н-поляризация.

$z=8.23657 \cdot 10^{-3} + i \cdot 2.64552 \cdot 10^{-2}$		$z=1.10491 \cdot 10^{-2} + i \cdot 3.54889 \cdot 10^{-2}$	
$\partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1$	$\partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 10$	$\partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 1$	$\partial \ell \cdot \pi = k \cdot (\beta - \alpha) = 10$
$5.804 \cdot 10^{-4} + i \cdot 3.817 \cdot 10^{-3}$	$1.836 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.012$	$6.722 \cdot 10^{-4} + i \cdot 4.42 \cdot 10^{-3}$	$2.13 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.01i$
$1.0 + i \cdot 4.431 \cdot 10^{-6}$	$1.0 + i \cdot 4.432 \cdot 10^{-5}$	$1.0 + i \cdot 5.944 \cdot 10^{-6}$	$1.000 + i \cdot 5.946 \cdot 10^{-5}$
$2.0 + i \cdot 2.215 \cdot 10^{-6}$	$2.0 + i \cdot 2.215 \cdot 10^{-6}$	$2.0 + i \cdot 2.972 \cdot 10^{-6}$	$2.0 + i \cdot 2.972 \cdot 10^{-6}$
$3.0 + i \cdot 1.477 \cdot 10^{-6}$	$3.0 + i \cdot 1.477 \cdot 10^{-6}$	$3.0 + i \cdot 1.981 \cdot 10^{-6}$	$3.0 + i \cdot 1.981 \cdot 10^{-6}$
$4.0 + i \cdot 1.108 \cdot 10^{-6}$	$4.0 + i \cdot 1.108 \cdot 10^{-6}$	$4.0 + i \cdot 1.486 \cdot 10^{-6}$	$4.0 + i \cdot 1.486 \cdot 10^{-6}$
$5.0 + i \cdot 8.861 \cdot 10^{-7}$	$5.0 + i \cdot 8.861 \cdot 10^{-7}$	$5.0 + i \cdot 1.189 \cdot 10^{-6}$	$5.0 + i \cdot 1.189 \cdot 10^{-6}$
$6.0 + i \cdot 7.384 \cdot 10^{-7}$	$6.0 + i \cdot 7.384 \cdot 10^{-7}$	$6.0 + i \cdot 9.905 \cdot 10^{-7}$	$6.0 + i \cdot 9.905 \cdot 10^{-7}$
$7.0 + i \cdot 6.329 \cdot 10^{-7}$	$7.0 + i \cdot 6.329 \cdot 10^{-7}$	$7.0 + i \cdot 8.490 \cdot 10^{-7}$	$7.0 + i \cdot 8.490 \cdot 10^{-7}$

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Д. Душкин Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов // Доп. НАН України.-1999.-№9-с.11-15
2. В.Д. Душкин Применение метода сингулярных интегральных преобразований к решению двумерных задач дифракции электромагнитных волн на сверхпроводящем слое с прямоугольными волноведущими каналами // Радиотехника. Электромагнитные волны и электронные системы.-1999.-№2,т.4-с.54-59