

## Решение уравнений газовой динамики с помощью неявной итерационной схемы

С. В. Ершов

*Институт проблем машиностроения им А.Н.Подгорного НАН Украины, Украина*

The problem of implicit iterative scheme construction is considered. The sample of such a scheme suggested yields more accurate solutions with weaker stability constraint than conventional ADI schemes.

### Введение

Развитие вычислительной аэродинамики привело к появлению большого количества разностных методов для уравнений Эйлера и Навье-Стокса. На начальных этапах предпочтение отдавалось явным методам, которые применялись для решения стационарных и нестационарных уравнений Эйлера. В последнее время, повышенное внимание уделяется неявным методам. В первую очередь это вызвано недостаточной вычислительной эффективностью явных методов при решении уравнений движения вязкого газа с использованием мелких разностных сеток.

Среди наиболее популярных неявных разностных схем можно выделить методы переменных направлений [1], методы LU-разложения [2], итерационные методы типа Гаусса-Зейделя [3]. При построении данных методов для нелинейных уравнений газовой динамики применяются линеаризация матриц Якоби, приближенная факторизация (обычно для многомерных задач) и, в некоторых случаях, диагонализация неявного оператора, приближенные алгоритмы неявной реализации граничных условий. Данные упрощения являются источниками дополнительных погрешностей, которые существенно влияют не только на точность решения, но и на устойчивость схемы.

Отдельным вопросом стоит возможность применения традиционных неявных разностных схем для нестационарных задач. В этом случае требование точности зависящего от времени решения может приводить к малым шагам интегрирования по времени, что в свою очередь будет сводить на нет преимущества неявной схемы в вычислительной эффективности.

В последнее время повышенный интерес проявляется к построению итерационных неявных схем на основе концепции псевдовремени [4]. В этом случае в исходные нестационарные уравнения добавляется дополнительный член, аналогичный временным производным от консервативных переменных, - так называемая производная по псевдовремени. При этом на каждом шаге по физическому времени выполняются итерации по фиктивному времени. Для получения точного нестационарного решения так же, как и для итерационных неявных схем типа Гаусса-Зейделя, этот итерационный процесс должен сойтись, что может потребовать десятков или даже сотен внутренних итераций (подытераций), и это неизбежно приводит к недостаточной вычислительной эффективности.

Таким образом, несмотря на последние достижения в области разностных методов проблема разработки новых более точных разностных схем, характеризующихся повышенной устойчивостью и быстрой сходимостью, остается актуальной. В настоящей работе рассматриваются вопросы построения неявной итерационной разностной схемы, в которой при аппроксимации исходных уравнений не используются линеаризация матриц Якоби, приближенная факторизация и диагонализация неявного оператора. В то же время данная схема может быть реализована как простая модификация известных алгоритмов переменных направлений, в которых применены все эти упрощения.

### Схемы переменных направлений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad F_i = J \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ \rho u_3 u_i + p \delta_{3i} \\ (\rho E + p) u_i \end{pmatrix}; \quad E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u_k u_k}{2}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

В уравнении (1) и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

При данном выборе векторов  $Q$  и  $F_i$  система (1) соответствует системе нестационарных трехмерных уравнений газовой динамики для невязкого газа в форме Эйлера. В данной работе для упрощения выкладок будем рассматривать декартовы координаты. Обобщение результатов на локальные криволинейные координаты тривиально.

При построении неявной схемы для уравнения (1) производную по времени заменим разностями назад, которые в англоязычной литературе называются BDF аппроксимацией [4] (backward difference formula – обратная разностная формула). При использовании трехточечной разности второго порядка получим:

$$\frac{3Q^{n+1} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\partial F_i^{n+1}}{\partial x_i} + O(\Delta t^2) = 0, \quad (2)$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени, а верхний индекс означает номер шага интегрирования по времени. Если пространственные производные  $\partial F_i^{n+1} / \partial x_i$  аппроксимировать на временном шаге  $n+1$  со вторым порядком, то формула (2) будет иметь второй порядок аппроксимации по пространству и времени.

Прибавляя к правой и левой частям уравнения (2) пространственные производные  $\partial F_i^n / \partial x_i$ , получим:

$$\frac{3Q^{n+1} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\partial(F_i^{n+1} - F_i^n)}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i^n}{\partial x_i} + O(\Delta t^2).$$

Используя обозначение

$$\Delta Q^{n+1} = Q^{n+1} - Q^n$$

и приближенную линейризацию

$$F_i^{n+1} - F_i^n = \left( \frac{\partial F_i}{\partial Q} \right)^n \Delta Q^{n+1} = \mathbf{A}_i^n \Delta Q^{n+1} + O(\Delta t^2), \quad (3)$$

получаем

$$\left( \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{A}_i^n \right) \Delta Q^{n+1} = \frac{1}{3} \Delta Q^n - \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial F_i^n}{\partial x_i} + O(\Delta t^2), \quad (4)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, матрицы  $\mathbf{A}_i^n$  предполагаются «замороженными» (не зависящими от времени на интервале времени  $\Delta t$ ).

Применение приближенной факторизации позволяет привести пространственный неявный оператор, стоящий в скобках левой части уравнения (4), к последовательности одномерных неявных операторов:

$$\prod_i \left( \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{A}_i^n \right) \Delta Q^{n+1} = \frac{1}{3} \Delta Q^n - \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial F_i^n}{\partial x_i} + O(\Delta t^2). \quad (5)$$

Здесь и далее под знаком произведения  $\prod$  суммирование по повторяющимся индексам не производится. Построение устойчивой и робастной схемы подразумевает расщепление матриц Якоби  $\mathbf{A}_i^n$  в уравнении (5) на положительно и отрицательно знакоопределенные (по собственным значениям). Так для матрицы  $\mathbf{A}_i$  будем иметь

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^+ + \mathbf{A}_i^- = \mathbf{R}_i \mathbf{\Lambda}_i^+ \mathbf{L}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{\Lambda}_i^- \mathbf{L}_i, \quad (6)$$

где  $\mathbf{\Lambda}_i^\pm = 0.5(\mathbf{\Lambda}_i \pm |\mathbf{\Lambda}_i|)$ ;  $\mathbf{\Lambda}_i = \text{diag}(\lambda_j^i)$  – диагональная матрица собственных значений  $\lambda_j^i$  матрицы  $\mathbf{A}_i$ ;  $j = 1, 5$ ;  $\mathbf{R}_i, \mathbf{L}_i$  – матрицы правых и левых собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}_i$ . Суммирование по повторяющимся индексам в формуле (6) не производится. Подставляя (6) в (5) получим

$$\prod_i \left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_i^-} \mathbf{A}_i^+ + \frac{\partial}{\partial x_i^+} \mathbf{A}_i^- \right) \right] \Delta Q^{n+1} = \frac{1}{3} \Delta Q^n - \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial F_i^n}{\partial x_i} + O(\Delta t^2). \quad (7)$$

Благодаря расщеплению матриц обеспечивается диагональное преобладание операторов в левой части уравнения (7), а значит и устойчивость решения. Пространственные производные в левой части уравнения (7) можно аппроксимировать двухточечными разностями «против потока»:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^\pm} = \pm \frac{a_{i\pm 1} - a_i}{h}, \quad (8)$$

где  $h$  – шаг сетки по пространству. Тогда, если пространственные производные в правой части (7) аппроксимировать со вторым порядком по пространству, то схема (7) является схемой второго порядка аппроксимации по пространству и

времени и представляет собой классический вариант неявной схемы переменных направлений (ADI – altering direction implicit) [1, 5-7 и др.]. Решение системы уравнений (7), линейной относительно  $\Delta Q^{n+1}$ , может быть выполнено с помощью трехточечных матричных прогонок. Дальнейшее упрощение схемы может состоять в приближенной диагонализации [8] неявного оператора с помощью формул (6), что позволяет использовать скалярные прогонок, однако снижает порядок аппроксимации по времени до первого.

Таким образом, основные источники погрешности схем ADI следующие:

- погрешности аппроксимации пространственных и временных производных;
- погрешности приближенной линеаризации;
- погрешности приближенной факторизации;
- погрешности диагонализации неявного оператора (если используется).

При больших шагах по времени, несмотря на формально второй порядок аппроксимации по времени, ошибки факторизации и линеаризации могут быть настолько существенны, что получаемые решения будут либо неприемлемы с точки зрения допустимой погрешности расчета, либо, вообще, неустойчивыми.

### Нефакторизованные неявные схемы

Повышение точности неявных схем можно достичь применением итерационных методов типа Гаусса-Зейделя [3, 6, 7] для уравнения (4) без использования приближенной факторизации и диагонализации оператора в квадратных скобках левой части. В этом случае для обеспечения устойчивости необходимо выполнить расщепление матриц (6)

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_i^-} \mathbf{A}_i^+ + \frac{\partial}{\partial x_i^+} \mathbf{A}_i^- \right)^n \right] \Delta Q^{n+1} = \frac{1}{3} \Delta Q^n - \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial F_i^n}{\partial x_i} + O(\Delta t^2), \quad (9)$$

и производные в левой части заменить двухточечными разностями «против потока» (8). Тогда, для сетки с постоянными шагами  $h_i$  по координатным направлениям  $x_i$  соответственно итерационный алгоритм может быть записан следующим образом:

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \left( \frac{\mathbf{A}_i^+ + \mathbf{A}_i^-}{h_i} \right)^n \right] \Delta Q^{n+1,k+1} = RHS(Q^n, \Delta Q^{n+1,k}). \quad (10)$$

В левой части уравнения (10) находятся члены левой части уравнения (9), относящиеся к текущей точке разностной сетки, а в правой части RHS уравнения (10) собраны все члены из правой части уравнения (9) и члены левой его части, относящиеся к соседним точкам.

В настоящее время применяются различные разновидности метода Гаусса-Зейделя для решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса, среди которых можно выделить методы с релаксацией (верхней, нижней), методы проходов по линиям и пр. [3, 6, 7].

Если пространственные производные в правой части (10) аппроксимировать со вторым порядком по пространству, то получаемое по схеме (10) решение будет второго порядка аппроксимации по пространству и времени, только если

внутренние итерации по Гауссу-Зейдели сошлись. Обычно на один шаг по времени требуются десятки итераций, что усложняет использование таких схем для нестационарных задач. Для получения стационарных решений уравнений газовой динамики количество внутренних итераций может быть сокращено за счет совмещения итераций по Гауссу-Зейделю и по времени. Заметим также, что для трехмерных нелинейных уравнений Эйлера и Навье-Стокса в некоторых случаях может наблюдаться медленная сходимость внутреннего итерационного процесса.

Таким образом, основные источники погрешности разностных схем такого рода следующие:

- погрешности аппроксимации пространственных и временных производных;
- погрешности приближенной линеаризации;
- погрешности недостаточной сходимости внутренних итераций.

### Нелинеаризованные неявные схемы

Линеаризация неявного оператора разностных схем (7) и (10) является принципиальным моментом при их построении, так как именно ее применение позволяет свести нелинейные разностные уравнения к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных приращений  $\Delta Q^{n+1}$ . Однако погрешности линеаризации при больших шагах по времени оказываются существенными, поэтому в последнее время проявляется повышенное внимание вопросу разработки нелинеаризованных схем. Один из путей в этом направлении состоит в использовании концепции псевдовремени [4, 9-11] в уравнениях газовой динамики. В этом случае вместо уравнений (1) решается следующая система

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \quad (11)$$

где  $\tau$  – фиктивное время (или псевдовремя). При построении эффективных разностных схем предполагается, что первоначально интегрирование осуществляется по фиктивному времени при «замороженном» реальном времени. После достижения установления по псевдовремени ( $\partial Q / \partial \tau \rightarrow 0$ ) уравнение (11) сводится к уравнению (1), которое оказывается аппроксимированным с необходимым порядком, т.е. осуществляется один шаг по реальному времени. Далее вычисления повторяются для следующего шага по реальному времени.

Производную по реальному времени в (11) аппроксимируем с помощью BDF формулы:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{3Q^{n+1} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\partial F_i^{n+1}}{\partial x_i} + O(\Delta t^2) = 0, \quad (12)$$

а пространственные производные  $\partial F_i^{n+1} / \partial x_i$  – со вторым порядком аппроксимации по пространству на временном шаге  $n+1$ . Если производную по псевдовремени заменить явной двухточечной разностью, то получаем схему

$$\frac{Q^{n+1,k+1} - Q^{n+1,k}}{\Delta\tau} + \frac{3Q^{n+1,k} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\partial F_i^{n+1,k}}{\partial x_i} + O(\Delta t^2, \Delta\tau) = 0, \quad (13)$$

где  $Q^n = Q^{n,k} \Big|_{k \rightarrow \infty}$  и верхним индексом  $k$  показан номер внутренней итерации (номер шага по фиктивному времени). Очевидно, что второй порядок аппроксимации достигается только при сходимости итераций по фиктивному времени. В этом случае производная  $\partial Q / \partial \tau$  стремится к нулю, а уравнение (11) – к уравнению (1), и, следовательно, уравнение (13) аппроксимирует уравнение (1) со вторым порядком по времени.

Обычно для интегрирования по фиктивному времени привлекают многошаговый метод Рунге-Кутты [4,11,12]. Ускорение сходимости можно достичь с помощью многосеточных алгоритмов и неявного сглаживания невязок [13]. В работе [4] из соображений устойчивости рекомендуется использовать большие  $N$ . Поэтому, также как и для метода Гаусса-Зейделя, на один шаг по реальному времени требуется большое количество внутренних итераций по псевдовремени.

В работе [9] предлагается в качестве начального приближения для итерационного процесса в уравнении (13) использовать решение на текущем временном шаге по неявной схеме переменных направлений типа (7), которое формально имеет второй порядок. Тогда можно не доводить итерационный процесс до полной сходимости, а выполнять только несколько итераций (в работе [9] речь идет о 4 - 15 итерациях). В таком виде неявная схема (13) может использоваться и для нестационарных задач, хотя очевидно, что она становится более громоздкой.

В работе [10] предлагается использовать неявный алгоритм для итераций по псевдовремени. Тем не менее, и в этом случае для получения приемлемой точности решения все равно требуется несколько десятков внутренних итераций.

Схемы с псевдовременем имеют следующие основные источники погрешности:

- погрешности аппроксимации пространственных и временных производных;
- погрешности недостаточной сходимости внутренних итераций.

### Построение итерационной схемы

На основании анализа основных недостатков и источников погрешности существующих неявных разностных схем в настоящей работе поставлена задача построить полностью неявную итерационную схему

- более простую по форме, чем описанные выше итерационные схемы;
- без использования приближенных факторизации, линеаризации матриц Якоби и диагонализации при аппроксимации исходных уравнений;
- требующую небольшое количество внутренних итераций для устойчивости и сходимости решения.

При построении схемы не будем использовать концепцию фиктивного времени, так как она неизбежно влечет за собой необходимость большого количества внутренних итераций, а воспользуемся идеей работы [14], в которой

предлагается строить итерационные процессы последовательной минимизации невязок исходных уравнений (1).

Производную по времени в уравнениях (1) аппроксимируем с помощью трехточечной BDF формулы. Пространственные производные  $\partial F_i^{n+1}/\partial x_i$  линеаризуем относительно приращений по внутренним итерациям, аналогично соотношениям (3), и аппроксимируем со вторым порядком по пространству. Выполним также расщепление матриц Якоби (6) и представим производные в неявном операторе разностями против потока (8). В итоге получаем:

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_i^-} \mathbf{A}_i^+ + \frac{\partial}{\partial x_i^+} \mathbf{A}_i^- \right)^{n+1,k} \right] \delta Q^{n+1,k+1} = \\ & = -\frac{2}{3} \Delta t S \left( \frac{3\Delta Q^{n+1,k} - \Delta Q^n}{2\Delta t} + \frac{\partial F_i^{n+1,k}}{\partial x_i} \right) + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\Delta Q^{n+1,k} = Q^{n+1,k} - Q^n$ ,  $S$  – коэффициент, обычно равный 1. При задании начального приближения ( $k=0$ ) для внутренних итераций  $Q^{n+1,0} = Q^n$ , приращение  $\Delta Q^{n+1,k}$  обращается в нуль, и схема (14) на первой итерации по  $k$  совпадает с классической схемой ADI. В этом случае, как уже отмечалось, получаемое решение уже на первой итерации будем иметь формально второй порядок аппроксимации, а при дальнейших итерациях будет только уточняться. Интересно заметить, что уравнения (14) могут быть получены из неявной ADI схемы для уравнений (11) с псевдовременем [10] в предположении, что шаги по фиктивному и реальному времени соотносятся следующим образом:  $\Delta \tau \gg \Delta t$ .

Уравнения (14) могут быть решены различными способами. В частности, можно использовать итерационный метод Гаусса-Зейделя, причем для ускорения сходимости имеет смысл совмещать итерации по Гауссу-Зейделю с итерациями по  $k$  в уравнении (14). Наиболее простой алгоритм получается, если привлечь ADI метод с диагонализацией неявного оператора в квадратных скобках уравнения (14) и его факторизацией как по направлениям  $x_i$ , так и по знаку собственных значений матриц Якоби. В этом случае наблюдается и более быстрая сходимость решения. Итоговая схема будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_1^-} (\mathbf{A}_1^+)^{n+1,k} \right] \delta \bar{\phi}^{n+1,k+1/3} = \\ & = -\frac{2}{3} \Delta t \hat{\mathbf{L}}_1^{n+1,k} S \left( \frac{3\Delta q^{n+1,k} - \Delta q^n}{2\Delta t} + \mathbf{T}_1^{n+1,k} \frac{\partial F_i^{n+1,k}}{\partial x_i} \right); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_1^+} (\mathbf{A}_1^-)^{n+1,k} \right] \delta \phi^{n+1,k+1/3} = \delta \bar{\phi}^{n+1,k+1/3}; \quad (16)$$

$$\delta q^{n+1,k+1/3} = \hat{\mathbf{R}}_1^{n+1,k} \delta \phi^{n+1,k+1/3}; \quad (17)$$

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_2^-} (\mathbf{A}_2^+)^{n+1,k} \right] \delta \bar{\phi}^{n+1,k+2/3} = \hat{\mathbf{L}}_2^{n+1,k} \delta q^{n+1,k+1/3}; \quad (18)$$

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_2^+} (\Lambda_2^-)^{n+1,k} \right] \delta \phi^{n+1,k+2/3} = \delta \bar{\phi}^{n+1,k+2/3}; \quad (19)$$

$$\delta q^{n+1,k+2/3} = \hat{\mathbf{R}}_2^{n+1,k} \delta \phi^{n+1,k+2/3}; \quad (20)$$

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_3^-} (\Lambda_3^+)^{n+1,k} \right] \delta \bar{\phi}^{n+1,k+1} = \hat{\mathbf{L}}_3^{n+1,k} \delta q^{n+1,k+2/3}; \quad (21)$$

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_3^+} (\Lambda_3^-)^{n+1,k} \right] \delta \phi^{n+1,k+1} = \delta \bar{\phi}^{n+1,k+1}; \quad (22)$$

$$\delta q^{n+1,k+1} = \hat{\mathbf{R}}_3^{n+1,k} \delta \phi^{n+1,k+1}, \quad (23)$$

где  $q = [\rho, u_1, u_2, u_3, p]^T$  – примитивные переменные;  $\mathbf{T}$  – матрица преобразования приращений консервативных переменных в примитивные;  $\hat{\mathbf{L}}$  и  $\hat{\mathbf{R}}$  – матрицы, которые могут быть получены из матриц собственных векторов следующим образом:  $\hat{\mathbf{L}}_i = \mathbf{L}_i \mathbf{T}_i^{-1}$ ;  $\hat{\mathbf{R}}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{R}_i$ . Использование матриц  $\hat{\mathbf{L}}$  и  $\hat{\mathbf{R}}$  вместо матриц собственных векторов  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{R}$  позволяет существенно сократить количество арифметических операций, приходящихся на один шаг расчета по неявной схеме. Преобразование приращений консервативных переменных в примитивные

$$\delta q^{n,k} = \mathbf{T}^{n,k} \delta Q^{n,k} \quad (24)$$

может быть записано как в линеаризованном, так и в точном виде, соответственно матрицу  $\mathbf{T}$  можно представить в «приближенной» и в «точной» форме. Общий вид матрицы  $\mathbf{T}^{n,k}$  следующий:

$$\mathbf{T}^{n,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_1^N}{\rho^K} & \frac{1}{\rho^K} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_2^N}{\rho^K} & 0 & \frac{1}{\rho^K} & 0 & 0 \\ -\frac{u_3^N}{\rho^K} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho^K} & 0 \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & \gamma - 1 \end{pmatrix},$$

где

$$t_{51} = (\gamma - 1) \frac{u_1^N u_1^K + u_2^N u_2^K + u_3^N u_3^K}{2};$$

$$t_{52} = -(\gamma - 1) \frac{u_1^N + u_1^K}{2}; \quad t_{53} = -(\gamma - 1) \frac{u_2^N + u_2^K}{2}; \quad t_{54} = -(\gamma - 1) \frac{u_3^N + u_3^K}{2}.$$

Для итерационной схемы индексы  $N$  и  $K$  заменяются на  $n, k$  и  $n, k + 1$  соответственно в «точной» матрице или оба на  $n, k$  в «приближенной». Для обычной ADI схемы итерационный процесс  $a$ , следовательно, индекс  $k$  отсутствуют, и индексы  $N$  и  $K$  заменяются на  $n$  и  $n + 1$  соответственно в «точной» матрице  $\mathbf{T}^n$  или оба на  $n$  в «приближенной».



Внесение матрицы  $\mathbf{T}^{n,k}$  под производную по времени снижает точность нестационарного решения, однако в настоящей работе это делается сознательно, так как многие существующие ADI алгоритмы используют этот прием. Матрицы  $\hat{\mathbf{L}}$  и  $\hat{\mathbf{R}}$  имеют вид:

$$\hat{\mathbf{L}}_i = \begin{vmatrix} 0 & -\delta_{i1} & -\delta_{i2} & -\delta_{i3} & (\rho c)^{-1} \\ c\delta_{i1} & 0 & -\rho\delta_{i3} & \rho\delta_{i2} & -c^{-1}\delta_{i1} \\ c\delta_{i2} & \rho\delta_{i3} & 0 & -\rho\delta_{i1} & -c^{-1}\delta_{i2} \\ c\delta_{i3} & -\rho\delta_{i2} & \rho\delta_{i1} & 0 & -c^{-1}\delta_{i3} \\ 0 & \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} & (\rho c)^{-1} \end{vmatrix}; \quad \hat{\mathbf{R}}_i = \begin{vmatrix} \frac{\rho}{2} & \frac{\delta_{i1}}{c} & \frac{\delta_{i2}}{c} & \frac{\delta_{i3}}{c} & \frac{\rho}{2c} \\ \frac{\delta_{i1}}{2} & 0 & \frac{\delta_{i3}}{\rho} & -\frac{\delta_{i2}}{\rho} & \frac{\delta_{i1}}{2} \\ \frac{\delta_{i2}}{2} & -\frac{\delta_{i3}}{\rho} & 0 & \frac{\delta_{i1}}{\rho} & \frac{\delta_{i2}}{2} \\ \frac{\delta_{i3}}{2} & \frac{\delta_{i2}}{\rho} & -\frac{\delta_{i1}}{\rho} & 0 & \frac{\delta_{i3}}{2} \\ \frac{\rho c}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho c}{2} \end{vmatrix}.$$

Как будет показано ниже, итерационная схема (15)-(23) оказывается более устойчивой численно, чем ADI схема. Для дополнительного повышения устойчивости применяется коррекция приращений  $\delta q^{n+1,k+1}$  (по аналогии с идеями работ [15, 16]), которая записывается следующим образом:

$$q^{n+1,k+1} = q^{n+1,k} + \delta q^{n+1,k+1} + \alpha \frac{(\delta q^{n+1,k+1})^2}{q^{n+1,k}} + O(\Delta t^3), \quad (25)$$

где  $\alpha \geq 0,25$ . Очевидно, что уравнение (26) можно использовать только для приращений плотности и давления. Кроме того, повышения устойчивости при некотором возрастании требуемого количества внутренних итераций можно достичь при задании коэффициента  $S < 1$ . Замена этого коэффициента матрицей предобуславливания [10, 12], по-видимому, позволит улучшить сходимость решения при малой скорости потока.

Для данной схемы приближенные приемы факторизации, линеаризации и диагонализации неявного оператора используются только для организации вспомогательного итерационного алгоритма, а не для аппроксимации исходных уравнений, которые записаны в разностном виде без этих упрощений. При достижении сходимости внутренних итераций влияние этих упрощений на решение становится пренебрежимо малым. В этом смысле рассматриваемая схема не является ни факторизованной, ни линеаризованной и ни диагонализированной. Кроме того, она существенно проще итерационных разностных схем, использующих концепцию псевдовремени. Основной источник погрешности этой схемы состоит в ошибках аппроксимации пространственных и временных производных исходных уравнений, в погрешности внесения матрицы  $\mathbf{T}$  под знак производной по времени, а также в погрешностях сходимости внутренних итераций. Если при построении схемы отказаться от диагонализации неявного оператора и в правой части уравнения (15) работать с приращениями консервативных переменных, а не примитивных, то, как уже упоминалось, схема будет иметь формально второй порядок аппроксимации по времени независимо от количества подитераций, и

единственным источником погрешности будут ошибки аппроксимации правой части уравнения (15).

### Численные результаты

Ввиду математической сложности разностной схемы исследование ее свойств выполнялось численно на решениях одномерных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}; F = J \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}; E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}; \gamma = 1.4.$$

Рассматривались две классические задачи одномерной газовой динамики с разрывными начальными данными: задача Сода [17] и задача Лакса [18]. Для решения этих задач использовались следующие разностные схемы:

- явная ENO схема второго порядка аппроксимации по пространству и времени (ENO) [19];
- диагонализированная неявная ENO схема второго порядка аппроксимации по пространству [19] с дополнительным расщеплением неявного оператора по характеристическим направлениям (ADI-ENO);
- неявная итерационная ENO схема, построенная с помощью формул (15)-(23), (25) (II-ENO).

В настоящей работе при аппроксимации правой части во всех ENO схемах использовались характеристические переменные [20]. Расчеты по II-ENO схеме выполнялись с 3-4 подитерациями.

Задача Сода представляет собой следующую задачу с начальными данными:

$$\begin{aligned} \rho_L = 1,0; \quad u_L = 0,0; \quad p_L = 1,0 \quad \text{при } x < 0; \\ \rho_R = 0,125; \quad u_R = 0,0; \quad p_R = 0,1 \quad \text{при } x > 0. \end{aligned}$$

Рассматривались решения на момент времени  $t = 0,2$  для  $x \in [0;1]$ . На рис. 1 приведены распределения плотности, полученные для числа Куранта  $\nu = \max_j(\lambda_j) \Delta t/h \approx 0.5$  по трем разностным схемам: II-ENO (кривая 1), ADI-ENO (кривая 2), ENO (кривая 3). Точное решение показано штриховой линией. Видно, что для невысоких чисел Куранта схема II-ENO близка по точности к явной ENO схеме, в то время как для ADI схемы в решении наблюдаются как немонотонности, так и существенные погрешности в определении скорости ударной волны и в целом решения между контактным разрывом и ударной волной.

На рис. 2 приведены результаты расчета для числа Куранта  $\nu \approx 3.0$ ; обозначения те же. (Схема ENO в этом случае неустойчива и, поэтому кривая 3 на графике отсутствует). Также как и для расчетов при  $\nu \approx 0,5$  решение, полученное по схеме II-ENO, более точное по сравнению с результатами, рассчитанными по схеме ADI-ENO. Кроме того, у схемы II-ENO оказались

существенно выше предельные числа Куранта, для которых сохраняется устойчивость. Данные по предельным числам Куранта приведены в таблице.

Таблица 1. Пределы устойчивости схем

Тестовая задача	ADI-ENO	П-ENO		
		$S = 1; \alpha = 0$	$S = 1; \alpha = 0,25$	$S = 0.3; \alpha = 0,25$
Тест Сода	4,2	8,0	14,6	87,7
Тест Лакса	1,7	3,5	16,8	50,4

Необходимо отметить, что при высоких числах Куранта точность решения существенно снижается. Устранить этот недостаток можно повышением порядка аппроксимации по времени.

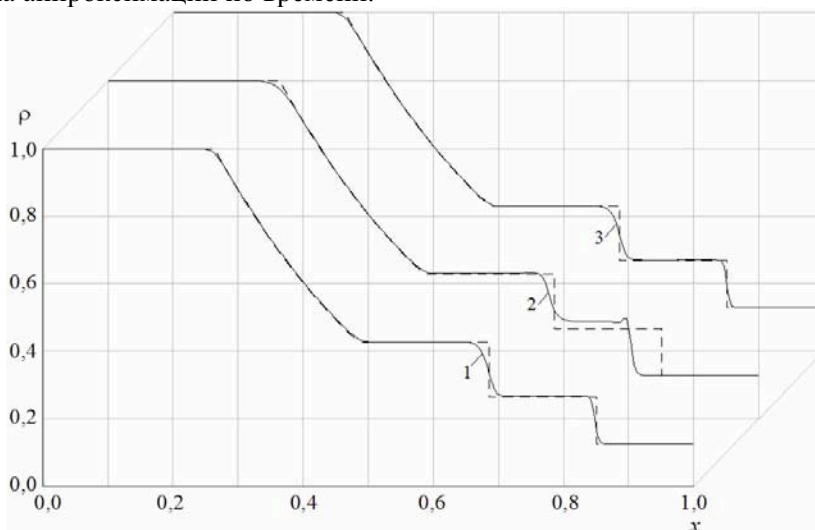


Рис. 1. Распределение плотности для задачи Сода в момент времени  $t = 0.2$  при  $\nu \approx 0,5$

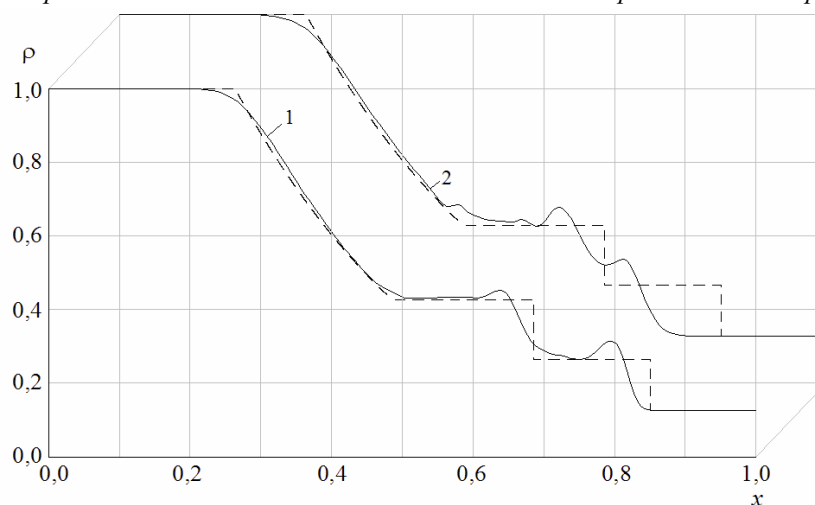


Рис. 2. Распределение плотности для задачи Сода в момент времени  $t = 0.2$  при  $\nu \approx 3,0$

Задача Лакса представляет собой следующую задачу с начальными данными:

$$\rho_L = 0,445; \quad u_L = 0,698; \quad p_L = 3,528 \quad \text{при } x < 0;$$

$$\rho_R = 0,5; \quad u_R = 0,0; \quad p_R = 0,571 \quad \text{при } x > 0.$$

Рассматривались решения на момент времени  $t = 0,16$  для  $x \in [0;1]$ . Данный тест по сравнению с задачей Сода характеризуется меньшей интенсивностью волны разрежения и большими перепадами параметров на контактном разрыве и ударной волне. На рис. 3 приведены результаты решения для числа Куранта  $\nu \approx 2,5$ . Обозначения те же, что и для рис. 2. Видно, что схема II-ENO дает более точные результаты по сравнению со схемой ADI-ENO. Предельные значения чисел Куранта для рассматриваемой задачи приведены в таблице. Расчеты по II-ENO схеме выполнялись с 3-4 подитерациями.

### Поведение невязок

Анализ сходимости решения, полученного по итерационной схеме, выполнен численно. На рис. 4 показана зависимость среднеквадратичной невязки  $\varepsilon = \left( \sum (\delta q^{n,k})^2 / N \right)$  на различных подитерациях  $k$  в зависимости от величины шага по времени  $\Delta t$ . Данные приведены для начального момента распада разрыва в задаче Сода, когда наблюдаются максимальные невязки. Расчеты выполнены для  $S = 1$ .

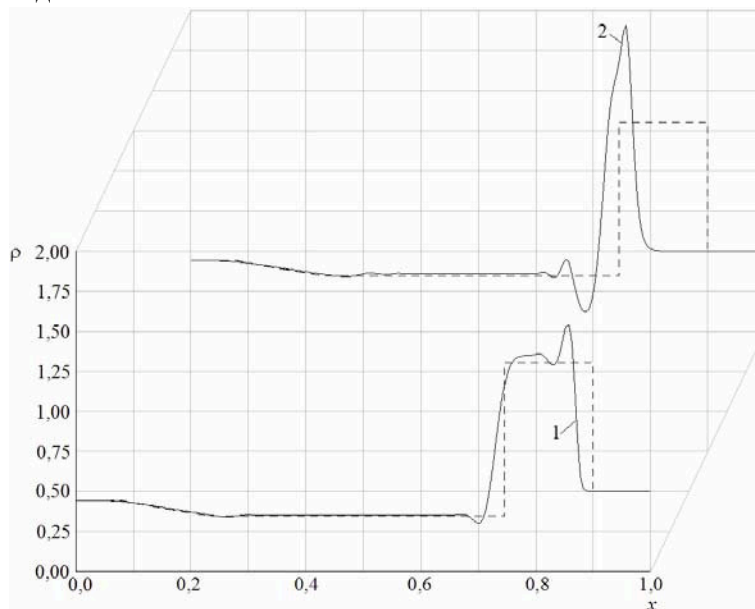


Рис. 3. Распределение плотности для задачи Лакса в момент времени  $t = 0.2$  при  $\nu \approx 2,5$

Из графиков видно, что при малых шагах по времени сходимость второго порядка достигается уже после второй подитерации. При бóльших шагах по времени погрешности решения значительно выше и скорость их убывания во время итерационного процесса – существенно ниже. Тем не менее, можно заметить, что сходимость второго порядка по времени достигается после 5-6 внутренних итераций. Таким образом, если аппроксимация исходных уравнений будет выполнена со вторым порядком по времени, то рассматриваемый итерационный процесс может обеспечить сходимость решения со вторым порядком при достаточно малом количестве внутренних итераций.

### Выводы и направления дальнейшей работы

В настоящей работе построена относительно простая итерационная неявная схема II-ENO для уравнений газовой динамики. Для реализации данной схемы требуются небольшие изменения существующих ADI алгоритмов. Предложенная схема лишена ошибок линеаризации, факторизации и диагонализации неявного оператора, хотя все эти приемы используются при организации итерационного процесса. В предложенном виде данная схема может оказаться полезной для ускорения сходимости решений применительно к стационарным многомерным задачам.

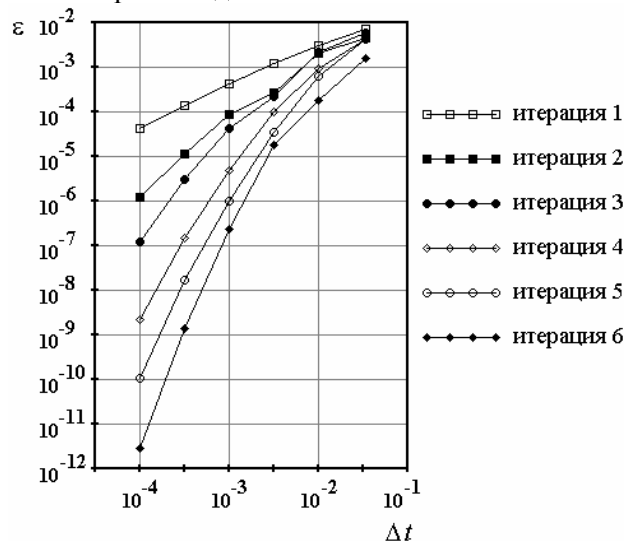


Рис. 4. Зависимость среднеквадратичной невязки уравнений (15)-(23) в итерационном процессе в зависимости от шага по времени

Результаты численного исследования показали, что схема ADI-ENO оказывается менее точной, чем построенная на ее основе итерационная неявная схема II-ENO. Устойчивость схемы II-ENO при этом также выше. Эти результаты косвенно подтверждают правильность выполненного в работе анализа источников погрешности этих схем.

К недостаткам схемы II-ENO можно отнести немонотонность получаемых решений при умеренных и высоких числах Куранта и ухудшение сходимости по времени при больших временных шагах. В дальнейших исследованиях планируется для устранения этих недостатков избавиться от погрешностей внесения матрицы  $\mathbf{T}$  под знак производной по времени, применить четырехточечные (и более) BDF формулы аппроксимации производной по времени, а также использовать ограничители не только для пространственных, но и для временных производных. Также важным моментом исследования данной схемы является ее апробация на многомерных стационарных и нестационарных задачах, предварительные результаты которой, выполненные автором совместно с А.В. Русановым, весьма обнадеживающие.

### Благодарность

Автор выражает признательность Русанову А.В. за полезные обсуждения проблемы и Полевому О.Б. за обстоятельную дискуссию и критические

замечания, часть из которых принята во внимание при подготовке данной статьи, а остальные будут учтены в дальнейших исследованиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. - Новосибирск: Наука. - 1981. - 304 с.
2. Jameson A., Turkel E. Implicit schemes and LU decompositions // *Math. Comp.* – 1981. – v. 37, № 2. - P. 385-397.
3. Jameson A. Transonic flow calculations for aircraft // *Lecture Notes in Mathematics, Numerical Methods in Fluid Dynamics / F. Brezzi, ed.* - Springer Verlag. – 1985. - P. 156-242.
4. Yao J., Jameson A., Alonso J.J., Liu F. Development and validation of a massively parallel flow solver for turbomachinery flows // *38<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 10-13, 2000.* - Reno, NV. - AIAA Paper. – 2000. - № 00-0882. - 23 p.
5. Beam R.M., Warming R.F. An implicit factored scheme for the compressible Navier–Stokes equations // *Proc. AIAA 3<sup>rd</sup> Comput. Fluid Dyn. Conf.* – Albuquerque, 1977. – P. 645–649.
6. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. – М.: Мир, 1990. – 728 с.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т. – М.: Мир, 1991. – 1056 с.
8. Иванов М.Я., Крупа В.Г., Нигматуллин Р.З. Неявная схема С.К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье-Стокса // *Ж. Вычисл. матем. и матем. физ.* - 1989. - т. 29, № 6. - С. 888-901.
9. Hsu J., Jameson A. An implicit-Explicit Hybrid Scheme for Calculating Complex Unsteady Flows // *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, January 8-11, 2002.* - Reno, NV. - AIAA Paper. – 2002. - № 02-0714. - 10 p.
10. Pandya S.A., Venkateswaran S., Pulliam T.H. Implementation of Preconditioned Dual-Time Procedures in OVERFLOW // *AIAA Paper.* – 2003. - № 03-0072. - 12 p.
11. Adami P., Belardini E., Martelli F., Michelassi V. Unsteady rotor/stator interaction: an improved unstructured approach // *Proc. of IGTI. ASME TURBO EXPO 2001, New Orleans, Louisiana, USA June 4-7, 2001.* - ASME Pap.- 2001. - № 01-GT-0356. - 11 p.
12. Turkel E., Vatsa V., Radespiel R. Preconditioning Methods for Low Speed Flows // *AIAA Paper.* – 1996. - № 96-2460-CP. - 19 p.
13. Jameson A. Essential elements of computational algorithms for aerodynamic analysis and design // *ICASE Report.* – 1997. – № 97–68. – 67 p.
14. Noll C., Ghia K. Development of a Fast-Exact Solution Method Using an Approximate Factorization Technique for Unsteady Viscous Problems // *Dynamics Motion CFD / L.Sakell, D.D. Knight, eds.* – New Brunswick: Rutgers University Press. – 1996. – PP. 307-314.
15. Тилляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // *Уч. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та.* – 1986. – т. 17, № 2. – С. 18–26.

16. Lund E., Møller H., Jakobsen L.A. Shape Optimization of Fluid–Structure Interaction Problems Using Two-Equation Turbulence Models // AIAA Paper. – 2002. - № 02–1478 - 12 p.
17. Sod G. A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. - v. 27, № 1. – 1978. P. 1-31.
18. Lax P. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Commun Pure Appl. Math. - 1954. - v. 7. № 1. - P. 159-201.
19. Ершов С.В. Квазимонотонная схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье–Стокса // Мат. моделирование. – 1994. –т. 6, № 11. – С. 63–75.
20. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. – 1983. – v. 49, № 2. – P. 357–393.