Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 519.642
№ 775, 2007, с.268-274

Исследование условий нётеровости дискретной системы со степенно-разностными индексами и комплексно-сопряженными значениями неизвестных

О. Н. Яковлева
Южно-украинский государственный педагогический университет, Украина

Determinating the Noether's conditions of the infinite system of algebraic equations with power difference indexes and complex conjugate values of the unknowns. The equivalence between the examined system and differential boundary value problem on a unit circle under given initial conditions of the systems was set up.

При решении ряда прикладных задач теории фильтров, антенн, радиолокации появляются бесконечные системы алгебраических уравнений со степенно-разностными индексами и их обобщения. Одним из направлений их исследования является изучение дискретных систем типа свёртки методами теории аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений. Исследованию систем с разностными индексами и их обобщений посвящено много работ, например [1-3], дискретные системы со степенно-разностными индексами и их обобщения изучены значительно меньше. Отметим, что методы исследования дискретных систем со степенно-разностными индексами и их обобщений существенно отличаются от методов исследования дискретных систем с разностными индексами и их обобщений.

Рассматривается бесконечная система алгебраических уравнений вида

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k + c_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\overline{\varphi}_k\right] + \sum_{k=-\infty}^{-1}\left[b_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k + d_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\overline{\varphi}_k\right]\right\} = f_n,\ n = 0,\pm 1,..,\quad (1)$$

где $a_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$, f_n - известные величины, а φ_k - неизвестные величины.

Векторы $a^{(\nu)}$, $b^{(\nu)}$, $c^{(\nu)}$, $d^{(\nu)}$ с компонентами $a_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$ соответственно принадлежат пространству $h_\alpha^{(r+1)}$, $r \ge 0$, $r \in Z$, $0 < \alpha \le 1$, а вектор f с компонентами f_n принадлежит пространству $l_q^{(r)}$, $r \ge 0$, $r \in \mathrm{Z}$, $1 < q \le 2$ или $h_\alpha^{(r+1)}$, $r \ge 0$, $r \in \mathrm{Z}$, $0 < \alpha \le 1$. Решением системы (1) будем называть бесконечномерный вектор φ с компонентами φ_k, который удовлетворяет системе. Решения системы (1) будем искать в пространстве h_α, $0 < \alpha \le 1$ или в l_q, $1 < q \le 2$ в зависимости от того, какому пространству принадлежит вектор f.

Методом, предложенным в работе [4], с помощью преобразования Фурье - Лорана исследование системы (1) сводится к исследованию дифференциальной краевой задачи на единичной окружности γ :

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left\{(-i)^{\nu}\left[a_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\varphi^{+}(t)}{ds^{\nu}}-b_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\varphi^{-}(t)}{ds^{\nu}}\right]+\right.$$
$$\left.+(-i)^{\nu}\left[c_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\overline{\varphi^{+}\left(\frac{1}{t}\right)}}{ds^{\nu}}-d_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\varphi^{-}\left(\frac{1}{t}\right)}{ds^{\nu}}\right]\right\}=f(t),\ t\in\gamma, \tag{2}$$

где $\varphi^{+}(t)$ $\left(\varphi^{-}(t)\right)$ – краевое значение на γ неизвестной функции $\varphi^{+}(z)$ $\left(\varphi^{-}(z)\right)$, аналитической в области $D^{+}=\{z\in C:|z|<1\}$ $\left(D^{-}=\{z\in C:|z|>1\}\right)$,

$$a_{\nu}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n}^{(\nu)}t^{n},\quad b_{\nu}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_{n}^{(\nu)}t^{n},\quad c_{\nu}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{n}^{(\nu)}t^{n},\quad d_{\nu}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_{n}^{(\nu)}t^{n}.$$

Согласно работе [5], функции $a_{\nu}(t)$, $b_{\nu}(t)$, $c_{\nu}(t)$, $d_{\nu}(t)\in H_{\alpha}^{(r)}$, функция $f(t)\in L_{p}^{(r)}$, $p\geq 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, если вектор $f\in l_{q}^{(r)}$, $1<q\leq 2$, или $f(t)\in H_{\alpha}^{(r)}$, если вектор $f\in h_{\alpha}^{(r+1)}$.

Система уравнений (1) и дифференциальная краевая задача (2) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, и каждому решению φ системы уравнений (1) соответствует одно и только одно решение $\varphi^{\pm}(t)$ дифференциальной краевой задачи (2), и наоборот.

При этом устанавливается связь между компонентами решения системы (1) и решением дифференциальной краевой задачи (2):

$$\varphi_{k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\varphi^{+}(t)-\varphi^{-}(t)\right]t^{-k-1}dt,\ k=0,\pm 1,\ldots \tag{3}$$

Краевая задача (2) является дифференциальной краевой задачей с обратным сдвигом Карлемана $\alpha(t)=\frac{1}{t}$ и с комплексно-сопряженными значениями неизвестных функций и их производных. Сведём задачу (2) к исследованию дифференциальной краевой задачи без сдвига и без комплексного сопряжения неизвестных. Вводим неизвестные функции $\Phi_{1}^{\pm}(z)$, $\Phi_{2}^{\pm}(z)$, $\Phi_{3}^{\pm}(z)$, $\Phi_{4}^{\pm}(z)$, аналитические в областях $D^{\pm}$ соответственно, краевые значения которых, по крайней мере, m раз дифференцируемы на γ и связаны с краевыми значениями $\varphi^{\pm}(t)$ и их производными следующим образом:

$$\frac{d^{\nu}\Phi_{1}^{+}(t)}{ds^{\nu}}=\frac{d^{\nu}\varphi^{+}(t)}{ds^{\nu}},\ \frac{d^{\nu}\Phi_{1}^{-}(t)}{ds^{\nu}}=\frac{d^{\nu}\varphi^{-}(t)}{ds^{\nu}},$$
$$\frac{d^{\nu}\Phi_{2}^{+}(t)}{ds^{\nu}}=\bar{t}\,\overline{\frac{d^{\nu}\varphi^{+}(t)}{ds^{\nu}}},\ \frac{d^{\nu}\Phi_{2}^{-}(t)}{ds^{\nu}}=\bar{t}\,\overline{\frac{d^{\nu}\varphi^{+}(t)}{ds^{\nu}}},$$

$$\frac{d^\nu \Phi_3^+(t)}{ds^\nu} = \frac{1}{t}\frac{d^\nu \varphi^-\left(\frac{1}{t}\right)}{ds^\nu}, \quad \frac{d^\nu \Phi_3^-(t)}{ds^\nu} = \frac{1}{t}\frac{d^\nu \varphi^+\left(\frac{1}{t}\right)}{ds^\nu},$$

$$\frac{d^\nu \Phi_4^+(t)}{ds^\nu} = \overline{\frac{d^\nu \varphi^-\left(\frac{1}{t}\right)}{ds^\nu}}, \quad \frac{d^\nu \Phi_4^-(t)}{ds^\nu} = \overline{\frac{d^\nu \varphi^+\left(\frac{1}{t}\right)}{ds^\nu}}.$$

Тогда задачу (2) можно записать в виде дифференциальной краевой задачи

$$t^m A(t)\Phi^{+(m)}(t) - t^m B(t)\Phi^{-(m)}(t) + \sum_{\nu=0}^{m-1}\left[N_\nu(t)\Phi^{+(\nu)}(t) - M_\nu(t)\Phi^{-(\nu)}(t)\right] = F(t), \; t \in \gamma, \quad (4)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_m(t) & 0 & 0 & c_m(t) \\ 0 & -\overline{b_m(t)}t & -\overline{d_m(t)}t & 0 \\ 0 & -(-1)^m d_m\left(\frac{1}{t}\right)t & -(-1)^m b_m\left(\frac{1}{t}\right)t & 0 \\ (-1)^m \overline{c_m\left(\frac{1}{t}\right)} & 0 & 0 & (-1)^m \overline{a_m\left(\frac{1}{t}\right)} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_m(t) & 0 & 0 & d_m(t) \\ 0 & -\overline{a_m(t)}t & -\overline{c_m(t)}t & 0 \\ 0 & -(-1)^m c_m\left(\frac{1}{t}\right)t & -(-1)^m a_m\left(\frac{1}{t}\right)t & 0 \\ (-1)^m \overline{d_m\left(\frac{1}{t}\right)} & 0 & 0 & (-1)^m \overline{b_m\left(\frac{1}{t}\right)} \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \left\{ f(t), \overline{f(t)}, f\left(\frac{1}{t}\right), \overline{f\left(\frac{1}{t}\right)} \right\}^T,$$

а вид матриц-функций $N_\nu(t)$, $M_\nu(t)$, $\nu = \overline{0, m-1}$ определён, причём $A_\nu(t)$, $B_\nu(t)$, $N_\nu(t)$, $M_\nu(t) \in H_\alpha^{(r)}$, вектор-функция $F(t) \in H_\alpha^{(r)}$, если вектор $f \in h_\alpha^{(r+1)}$ или $F(t) \in L_p^{(r)}$, $p \ge 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 2$, если $f \in l_q^{(r)}$, $1 < q \le 2$. Принадлежность матриц-функций и векторов-функций к некоторому пространству будем понимать поэлементно.

При этом компоненты решения системы (1) выражаются через решение дифференциальной краевой задачи (4) по формуле

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma [\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)]t^{-k-1}dt, \; k = 0, \pm 1, \ldots . \quad (5)$$

Используя результаты работы [6], сведём исследование дифференциальной краевой задачи (4) к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений на γ. Согласно работам [3, 7] каждую пару вектор-функций $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ размерности 4, аналитических соответственно в областях D^+, D^-,

$\Phi^{-}(\infty)=0$, и таких, что краевые значения на γ $\Phi^{+(m)}(t)$, $\Phi^{-(m)}(t)$ соответственно вектор-функций $\Phi^{+(m)}(z)$, $\Phi^{-(m)}(z)$ принадлежат пространству $L_p^{(r)}$, $p \geq 2$, можно записать в виде

$$\Phi^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} P(z,\tau)\rho(\tau)d\tau + D_0(z)\,,\ z\in D^{+}\,,$$
$$\Phi^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} Q(z,\tau)\rho(\tau)d\tau\,,\ z\in D^{-}\,, \tag{6}$$

где $\rho(t)$- неизвестная вектор-функция размерности 4, которая однозначно определяется по векторам-функциям $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$, а вектор-функция размерности 4 $D_0(z)$ для данного случая имеет вид

$$D_0(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\Phi^{+(k)}(0)z^k\,. \tag{7}$$

Функции $P(z,\tau)$ и $Q(z,\tau)$ и их частные производные по z до порядка $\omega-1$ $(m-1)$ непрерывны в области $D^{+}\cup\gamma$ и $D^{-}\cup\gamma$ соответственно и удовлетворяют на контуре γ условию Гёльдера по обеим переменным. Вид функций $P(z,\tau)$ и $Q(z,\tau)$ определён в работе [7]:

$$P(z,\tau)=\frac{(-1)^{\omega}}{(\omega-1)!}\left[(\tau-z)^{\omega-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)+\sum_{k=1}^{\omega-1}d_k\tau^{\omega-k-1}z^k\right],\ z\in D^{+}\,,\ \tau\in\gamma\,,$$
$$Q(z,\tau)=\frac{(-1)^{m}}{(m-1)!}\left[(\tau-z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)+\sum_{k=0}^{m-2}l_k\tau^{m-k-1}z^k\right],\ z\in D^{-}\,,\ \tau\in\gamma\,. \tag{8}$$

Решения дифференциальной краевой задачи (4) будем искать в классах векторов-функций, у которых вектор-функция $\Phi^{+}(z)$ и её производные до порядка $m-1$ имеют известные значения $\Phi^{+}(0)$, $\Phi^{+'}(0)$, …, $\Phi^{+(m-1)}(0)$. В этом случае определённая формулой (7) вектор-функция $D_0(z)$ будет известной, а вектор-функции $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$ по представлениям (6) строятся однозначно.

Тогда, используя формулы Сохоцкого, формулы Сохоцкого для производных, на основании свойств функций $P(z,\tau)$ и $Q(z,\tau)$ и представлений (6), исследование дифференциальной краевой задачи (4) приводится к исследованию следующей системы сингулярных интегральных уравнений

$$K\rho = K_0\rho + T\rho = F + C_0\,, \tag{9}$$

где

$$(K_0\rho)(t)=a(t)\rho(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau-t}d\tau\,,\ (T\rho)(t)=\int_{\gamma}k(t,\tau)\rho(\tau)d\tau\,,$$

$$a(t)=\frac{1}{2}\left[A(t)+B(t)\right],\ b(t)=\frac{1}{2}\left[A(t)-B(t)\right],$$

$$C_0(t) = -\sum_{\nu=0}^{m-1} N_\nu(t) D_0^{(\nu)}(t),$$

$$k(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{\partial^j P(t,\tau)}{\partial t^j} N_j(t) + (-1)^j t^{m-1-j}\tau^j B(t) + \frac{\partial^j Q(t,\tau)}{\partial t^j} M_j(t)\right],$$

где $D_0^{(\nu)}(t)$ - краевое значение на γ вектор-функции $D_0^{(\nu)}(z)$.

На основании свойств функций $P(z,\tau)$ и $Q(z,\tau)$ решения дифференциальной краевой задачи (4) выражаются через решения системы сингулярных интегральных уравнений (9) по формулам (6).

Если значения $\Phi^+(0)$, $\Phi^{+'}(0)$, …, $\Phi^{+(m-1)}(0)$ не заданы, то правая часть системы сингулярных интегральных уравнений (9) зависит от m произвольных постоянных векторов размерности 4. Это означает, что решения системы сингулярных интегральных уравнений (9), если они существуют, также зависят от m произвольных векторов. Тогда, на основании представлений (6), решения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ дифференциальной краевой задачи (4) также будут зависеть от m произвольных значений $\Phi^+(0)$, $\Phi^{+'}(0)$, …, $\Phi^{+(m-1)}(0)$. Чтобы избежать этого, необходимо задавать значения $\Phi^+(0)$, $\Phi^{+'}(0)$, …, $\Phi^{+(m-1)}(0)$, которые являются начальными условиями дифференциальной краевой задачи (4). При задании начальных условий дифференциальная краевая задача (4) и система сингулярных интегральных уравнений (9) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, и каждому решению $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ дифференциальной краевой задачи (4) соответствует одно и только одно решение $\rho(t)$ системы сингулярных интегральных уравнений (9), и наоборот.

В силу эквивалентности системы уравнений (1) и дифференциальной краевой задачи (4) задание начальных условий дифференциальной краевой задачи $\Phi^+(0)$, $\Phi^{+'}(0)$, …, $\Phi^{+(m-1)}(0)$ влечёт за собой задание величин φ_k, $k = \overline{-m; m-1}$, которые будем называть начальными условиями системы уравнений (1).

Исследуем систему (1) в случае нулевых начальных условий. В этом случае вектор-функция $D_0(z) \equiv 0$ и $C_0(t) \equiv 0$.

Теорема 1. Если начальные условия системы уравнений (1) нулевые и векторы $a^{(\nu')}$, $b^{(\nu')}$, $c^{(\nu')}$, $d^{(\nu')} \in h_\alpha^{(r+1)}$, то система уравнений (1) в пространствах h_α и l_q, $1 < q \le 2$, нетерова тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$a_m(t)\overline{a_m\left(\frac{1}{t}\right)} - c_m(t)\overline{c_m\left(\frac{1}{t}\right)} \neq 0,\ b_m(t)\overline{b_m\left(\frac{1}{t}\right)} - d_m(t)\overline{d_m\left(\frac{1}{t}\right)} \neq 0,\ t \in \gamma\ . \qquad (10)$$

Если условия (10) выполнены, то частные индексы $\kappa_1 \ge \kappa_2 \ge \kappa_3 \ge \kappa_4$ системы уравнений (1) совпадают с частными индексами матрицы-функции $A^{-1}(t)B(t)$.

Обозначим $P = \sum_{\kappa_j \ge 0}\kappa_j$, $Q = -\sum_{\kappa_j < 0}\kappa_j$.

Теорема 2. Пусть начальные условия системы уравнений (1) нулевые, векторы $a^{(\nu`)}$, $b^{(\nu`)}$, $c^{(\nu`)}$, $d^{(\nu`)} \in h_\alpha^{(r+1)}$, выполнены условия (10) и вектор $f \in h_\alpha^{(r+1)}$ или $f \in l_q^{(r)}$, $1 < q \le 2$. Тогда в пространствах h_α и l_q, $1 < q \le 2$, однородная система уравнений (1) имеет не меньше чем P линейно независимых решений, а неоднородная система уравнений (1) будет разрешимой, если будут выполнены не меньше чем Q условий разрешимости

$$\int_\gamma F(t)\psi_j(t)dt = 0,$$

где $F(t)$ - правая часть системы сингулярных интегральных уравнений (9), а $\psi_j(t)$ - линейно независимые решения однородной системы сингулярных интегральных уравнений, союзной системе СИУ (9).

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и система уравнений (1) разрешима. Если вектор $f \in l_q^{(r)}$, $1 < q \le 2$, то компоненты решений системы уравнений (1) удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=m}^{\infty}\left|k^{r+m}\varphi_k\right|^q < +\infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{-m-1}\left|k^{r+m}\varphi_k\right|^q < +\infty, \quad 1 < q \le 2.$$

Если вектор $f \in h_\alpha^{(r+1)}$, то при $0 < \alpha \le 1$ компоненты решений системы уравнений (1) удовлетворяют условиям

$$\left|\varphi_k\right| \le m_1 k^{-r-\alpha-m}, \ k \ge m; \ \left|\varphi_k\right| \le m_2 k^{-r-\alpha-m}, \ k < -m,$$

а при $\alpha = 1$ компоненты решений системы уравнений (1) удовлетворяют условиям

$$\left|\varphi_k\right| \le m_3 k^{-r-1-m+\varepsilon}, \ k \ge m; \ \left|\varphi_k\right| \le m_4 k^{-r-1-m+\varepsilon}, \ k < -m.$$

Если начальные условия системы (1) не нулевые, т.е. существуют $\varphi_k \ne 0$, $k = \overline{-m, m-1}$, то заменой $\Phi_k = 0$, $-m \le k \le m-1$, $\Phi_k = \varphi_k$, $k \le -m-1$, $k \ge m$ система уравнений (1) приводится к системе уравнений с нулевыми начальными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И.Ц., Фельдман А.И. Уравнения в свёртках и проекционные методы их решения. - М.: Наука, 1971. – 352с.
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. - М.: Наука, 1977. – 444с.
3. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свёртки. – М.: Наука, 1978. – 295с.
4. Яковлева О.Н. Разрешимость и свойства решений бесконечных систем со степенно-разностными индексами // Дифференциальные уравнения. – 2001. – т.37, №10. – С. 1425-1431.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 936с.

6. Яковлєва О.М. До теорії Нетера нескінчених систем рівнянь зі степенево-різницевими та степенево-сумарними індексами // Математичні студії. – 2006. т.25, №1. – С. 87-96.
7. Хуснутдинов Р.Ш. Исследование одного класса линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Сб. «Конструктивная теория функций и функциональный анализ». – Казань: Изд-во КГУ. – 1983. – №3. – С.94-106.