

## Математическое моделирование струйного обтекания тел цилиндрической формы

А. В. Афанасьев, В. В. Афанасьева

*Московский государственный университет леса, Россия*

Target setting and numerical method of solution two-dimensional task of impingement circular horizontal cylinder with slot jet of viscous incompressible fluid have been done. On the base of method realized program of numerical experiment. Good coincidences with the experimental data have been achieved for test examples.

### 1. Введение

Настоящая работа посвящена математическому моделированию обтекания горизонтального цилиндра плоской струей вязкой несжимаемой жидкости.

Широкое применение в охлаждении микрочипов и «тепловых трубок», находящихся внутри персональных компьютеров, нашли именно ламинарные струи [1], так как они обеспечивают практически пассивное тепловое регулирование и позволяют экономить заряд батареи.

Задача о взаимодействии плоской струи с телами различной формы многопараметрическая, поэтому применение математического моделирования и вычислительного эксперимента как инструмента исследования данной задачи в настоящее время является актуальным.

При изучении обтекания кругового цилиндра струей жидкости можно воспользоваться данными основательно изученной задачи об обтекании цилиндра бесконечным потоком жидкости [2-5], эта задача является частным случаем струйного обтекания при условии, что ширина струи много больше диаметра цилиндра.

Данная работа является продолжением изучения смешанной конвекции при струйном обтекании цилиндра. Основные результаты исследований, полученные авторами, представлены в работах [6-8].

Целью настоящей работы является применение метода «вихрей в ячейках» для моделирования струйного обтекания цилиндра струей вязкой несжимаемой жидкости. Данный метод, как показано в работе [9], более эффективен, чем метод, описанный в [7], для отслеживания взаимодействия струи с лобовой зоной цилиндра.

### 2. Постановка задачи

Рассматривается двумерная задача о ламинарном обтекании цилиндра плоской струей жидкости (рис. 1а). На горизонтальный цилиндр, диаметр которого  $D$ , из сопла шириной  $H$  натекает струя жидкости. Расстояние от среза сопла до цилиндра равно величине  $h$ . Профиль скорости на срезе сопла прямоугольный. Скорость истечения жидкости из сопла  $V$  – дозвуковая.

В основу модели положены уравнения Навье-Стокса с переходом к функции тока ( $\Psi$ ) и функции интенсивности вихря ( $\omega$ ) – (2.1-2.2). Использовалась

полярная система координат со сгущением расчетной сетки у цилиндра с помощью преобразования  $\xi = e^{-k \cdot r}$ , где  $k = \text{const}$  - параметр сгущения.

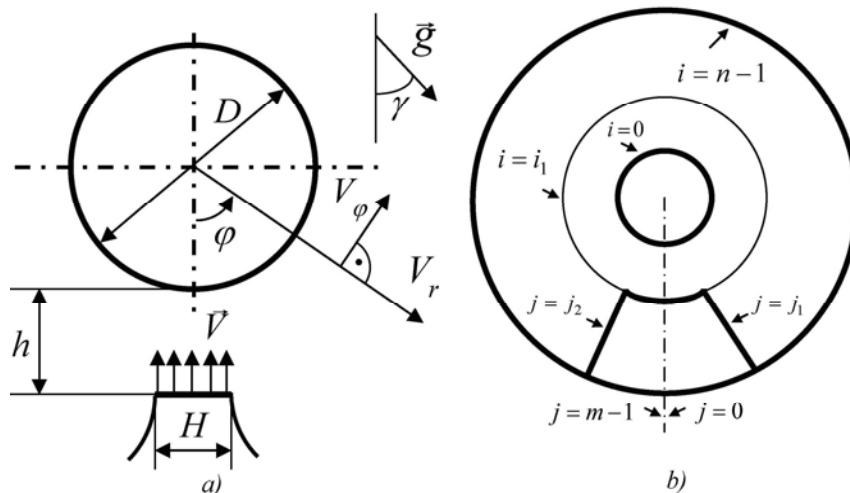


Рис.1. Схема задачи  
а) расчетная схема задачи;

б) схема расположения узлов сетки (в координатах  $\bar{\xi}, \varphi$ )

Определяющими параметрами являются: число Рейнольдса  $Re = V \cdot D / \nu$ ,  $H/D$  — отношение ширины сопла к диаметру цилиндра,  $h/H$  — отношение расстояния от среза сопла до цилиндра к ширине сопла.

Таким образом, уравнения примут вид:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{Re} \Delta\omega; \quad (2.1)$$

$$\Delta\Psi = -\omega. \quad (2.2)$$

Уравнение переноса вихрей (2.1) представим в виде двух частей.

Конвективная часть примет вид

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0, \quad (2.3)$$

диффузионная часть

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta\omega. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) аппроксимировалось вихревыми элементами, положения и циркуляция которых определялись согласно уравнениям:

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p(\mathbf{x}_p); \quad (2.5)$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (2.6)$$

Граничные условия для системы уравнений ставились следующим образом:

На цилиндре  $\Psi = 0$  ;  $V_r = 0$  ;  $V_\varphi = 0$  и внешних стенках сопла  $\Psi = \text{const}$  ;  $V_r = 0$  ;  $V_\varphi = 0$  – условия прилипания. На срезе сопла – безвихревое течение и равномерное распределение скорости  $\Psi = -(0.5 + h/D) \cdot \sin(\varphi)$ ,  $\omega$  на границе из уравнения (2.2) с учетом выше сказанного. На внешней границе – условия полной проницаемости:  $\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0$  ;  $\frac{\partial V_r}{\partial \xi} = 0$  ;  $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \xi} = 0$  . Вихри генерировались вблизи поверхности цилиндра и на кромках сопла.

### 3. Метод численного решения

В качестве метода решения поставленной задачи авторы применили метод «вихрей в ячейке». В этом методе интегрируется уравнение траектории движения каждого дискретного вихря, то есть скорости вычисляются по значениям функции тока, которая в отличие от метода дискретных вихрей определяется не путем суммирования (наложения, суперпозиции) вкладов от отдельных дискретных вихрей, а из решения уравнения для функции тока с использованием сеточной функции завихренности, определенной путем осреднения вкладов дискретных вихрей по ячейкам сетки.

Для перехода от системы дифференциальных уравнений и краевых условий, к соответствующим конечно-разностным соотношениям, рассматриваемая область изменения безразмерных координат  $(\bar{\xi}, \varphi)$  была заменена равномерной сеткой узловых точек с номерами  $i, j$ , которые изменялись в диапазонах:  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $0 \leq j \leq m-1$  (рис. 1b). Сетка задавалась как  $n, l \times m$ , где  $n$  и  $m$  - количество всех узлов в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно, а  $l$  - количество узлов, приходящихся на сопло, в радиальном направлении. Параметр сетки  $k$  выбирался следующим образом:  $k = -D/h \cdot \ln(l/n)$ .

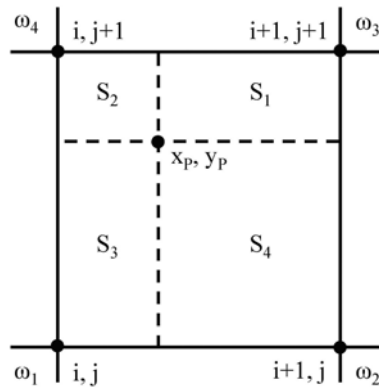


Рис. 2. Схема весов для распределения завихренности  
 Интенсивность вихря в узловых точках (рис. 2) изменялась согласно

$$\omega_q = \sum_p \frac{S_q \Gamma_p}{S^2}, \quad q = 1, 2, 3, 4 \tag{3.1}$$

Циркуляция каждого дискретного вихря определялась по формуле:

$$\Gamma_p = (\omega_{\text{гр}} - \omega_{\Sigma_w}) \cdot S, \quad (3.2)$$

где  $\omega_{\text{гр}}$  - завихренность на границе определялась из уравнения (2.2),  
 $S$  - площадь ячейки, внутри которой находится рассматриваемый вихрь,  
 $\omega_{\Sigma_w}$  - завихренность, генерируемая отсоединенными вихрями, которые находятся в той же ячейке.

После учета вкладов всех дискретных вихрей (3.1) завихренность оказывалась определенной во всех узлах сетки, и функция тока могла быть найдена из уравнения (2.2), которое решалось методом установления по неявной схеме с использованием продольно – поперечных прогонок.

Затем определялось поле скоростей и для каждого дискретного вихря определялась его скорость согласно

$$u_p = \sum_{q=1}^4 \frac{U_q \cdot S_q}{S}; \quad v_p = \sum_{q=1}^4 \frac{V_q \cdot S_q}{S}. \quad (3.3)$$

Далее интегрированием по времени уравнения траекторий вихрей (2.5) определялись их новые положения:

$$x_p(t + \Delta t) = x_p(t) + u_p(t) \cdot \Delta t; \quad y_p(t + \Delta t) = y_p(t) + v_p(t) \cdot \Delta t. \quad (3.4)$$

На основе данной методики расчета разработано программное обеспечение под Windows для проведения вычислительных экспериментов для исследования взаимодействия плоской струи вязкой несжимаемой жидкости с горизонтальным круговым цилиндром. Текст программы написан на языке программирования C++. Время расчета одного варианта задачи на персональном компьютере в среднем составляло около нескольких часов.

#### 4. Тестирование метода и результаты

Оценка достоверности получаемых результатов проводилась путем сравнения результатов вычислительных экспериментов (рис. 3) с известными экспериментальными данными [2]. В качестве тестового примера рассматривалось обтекание кругового цилиндра бесконечным потоком.

Авторы провели предварительные расчеты гидродинамической картины течения вблизи цилиндра для  $Re = 500$ . Из рис. 4 видно, что след за цилиндром для струйного обтекания (рис 4б, 4в) отличается от следа при обтекании цилиндра бесконечным потоком (рис. 4а), а так же зависит от ширины струи и расположения цилиндра относительно среза сопла.

Так же можно отметить, что при ширине струи больше диаметра цилиндра когерентные структуры, генерируемые струей, влияют только на след за цилиндром, в то время как при ширине струи меньше диаметра цилиндра они взаимодействуют с поверхностью цилиндра, что, несомненно, сказывается на его гидродинамических характеристиках.

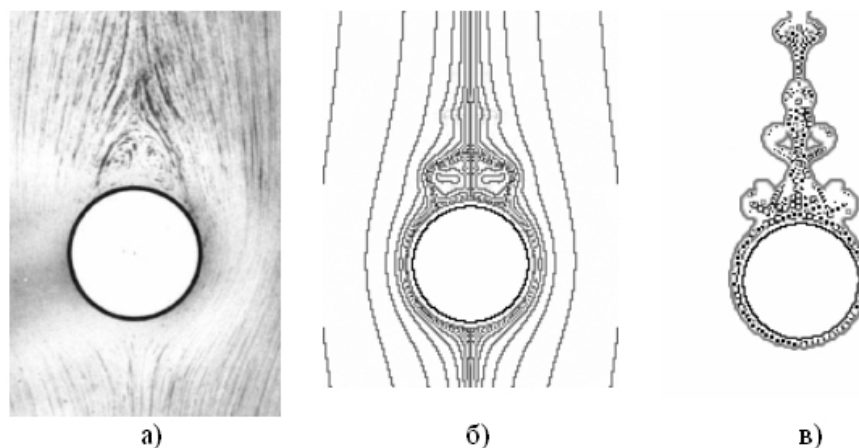


Рис. 3. Картина течения  $Re=13.1$ ;  
а) данные натурального эксперимента [1]; б) функции тока; в) вихри

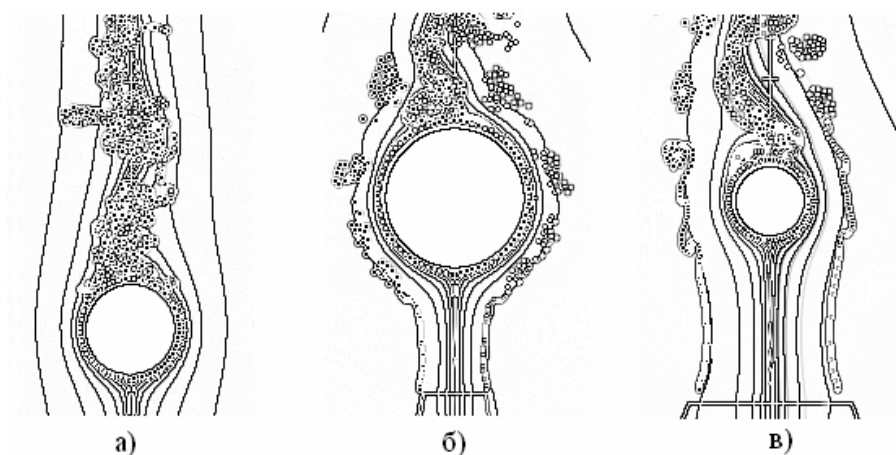


Рис. 4. Картина течения  $Re=500$ ;  
а) бесконечный поток; б)  $H/D = 0.4$ ,  $h/H = 2$ ; в)  $H/D = 2$ ,  $h/H = 1$

## 5. Выводы

В данной работе описан разработанный и реализованный авторами алгоритм численного решения задачи о взаимодействии плоской струи вязкой несжимаемой жидкости с горизонтальным круговым цилиндром. Наличие когерентных структур при струйном обтекании цилиндра служит иллюстрацией того, что с помощью разработанного алгоритма, основанного на методе «вихрей в ячейках», можно моделировать отдельные особенности сложного нестационарного течения вблизи цилиндра.

Сравнение результатов тестовых расчетов с известными экспериментальными данными позволяет сделать вывод о том, что разработанная авторами реализация алгоритма дает возможность корректно

моделировать движение вязкой жидкости вблизи поверхности цилиндра для случая обтекания цилиндра бесконечным потоком.

Авторы планируют провести верификацию метода для случая струйного обтекания цилиндра, а так же исследовать влияние когерентных структур струи на след за цилиндром в зависимости от взаимного расположения струи и цилиндра. В дальнейшем планируется распространить метод «вихрей в ячейках» и на случай взаимодействия плоской струи вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости с горизонтальным изотермически нагретым цилиндром.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Guarino J.R., Manno V.P. Characterization of laminar jet impingement cooling in portable computer applications. // Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium. San Jose (California, USA), 2001 (<http://www.rostenaward.org/manno1.pdf>).
2. Альбом течений жидкости и газа: пер. с англ./сост. М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974.
4. Roshko. A. On the development of turbulent wakes from vortex streets. Report 1191 national advisory committee for aeronautics. – 1954.
5. Брдлик П.М., Семенов Ю.П., Хроменко А.В. Некоторые особенности теплообмена и гидродинамики при вынужденном обтекании горизонтального цилиндра // Гидродинамика и тепломассообмен в технологических процессах. – М.: МЛТИ, 1988. – № 207. С. 5-15.
6. Афанасьев А.В., Афанасьева В.В. Расчет гидродинамики и теплообмена при струйном обтекании цилиндра. // Труды Четвертой Российской Национальной Конференции по Теплообмену (РНКТ-4) Т. 2. Вынужденная конвекция однофазной жидкости. – М.: Изд-во МЭИ, 2006. – С. 50-53.
7. Афанасьев А.В., Афанасьева В.В., Хроменко А.В.. Численное исследование совпадающей смешанной конвекции при обтекании горизонтального цилиндра плоской струей вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительные методы и программирование. – Т. 8. № 1. 2007. – С. 65-72.
8. Афанасьев А.В., Афанасьева В.В. Исследование локального и среднего теплообмена при взаимодействии плоской струи жидкости с горизонтальным цилиндром в режиме ламинарной смешанной конвекции. //Труды XVI школы семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках». – Т. 1. М.: Изд-во МЭИ, 2007. – С. 62-65.
9. Афанасьев А. В., Афанасьева В. В., Афанасьев В. Г. Численное моделирование взаимодействия плоской струи с горизонтальным изотермическим цилиндром в режиме смешанной ламинарной конвекции// Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007). Харьков-Херсон, 2007. – С. 35-42