

Метод R-функций для расчета взаимосвязанных полей в гидротоках

И. А. Баранов, О. В. Кравченко, И. Г. Суворова

Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины, Украина

Mathematical model of energy dissipation in the flow of tough incompressible fluid in passing through different pipeline elements is built in this work. According to the built model on the basis of R-function method in the programme system POLE the software is worked out. Numerical experiments are carried out.

Моделирование физических процессов, протекающих в энергопреобразующих установках, связано с расчетом различных физико-механических полей – гидродинамических, температурных, деформационных и других. Это приводит к необходимости решения взаимосвязанных задач математической физики в областях сложной формы.

В задачах гидродинамики важную роль играет геометрия каналов, которые могут обладать рядом геометрических особенностей, таких как углубления, уступы, повороты и другие, структура течения зависит от многих факторов [1]. Адекватный учет разнообразной геометрической информации очень важен, но реализуется в разных вычислительных методах с разной степенью эффективности.

Метод R-функций (RFM), разработанный академиком НАН Украины В.Л. Рвачёвым [2], позволяет учесть геометрическую информацию о каналах на аналитическом уровне и точно удовлетворить граничным условиям, кроме того, он является очень удобным математическим аппаратом для вычисления взаимосвязанных полей. Решив одну краевую задачу, мы получаем ее приближенное решение в аналитическом виде, которое очень просто использовать при решении других задач. Причем данная “цепочка” задач поддерживается средствами программной системы POLE [2,3]. Однако для успешного решения в каждой конкретной задаче часть аналитической работы должна быть выполнена уникальным образом с учетом уникальной специфики задачи.

Целью наших исследований является построение математической модели процесса диссипации энергии и, соответственно, нагрева жидкости, при прохождении через различные элементы трубопровода с разработкой программного обеспечения для научно-технических расчетов в соответствии с этой моделью. Решается комплекс взаимосвязанных задач, позволяющий найти гидродинамические характеристики потока и по ним вычислить количество диссипированной энергии. Решение данного комплекса задач методом R-функций впервые осуществляется в настоящей работе, что позволило впервые

реализовать его с полным учетом особенности геометрии гидродинамического канала.

Поскольку расчет эффективности различных теплогенераторов с максимальной точностью востребован в насущных задачах технического проектирования, то актуальность принятой постановки задачи не вызывает сомнений.

Гидродинамика потока жидкости

На 1-м этапе строится математическая модель плоского течения, где решение соответствующего уравнения находится методом R-функций [4,5,6].

Плоское стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в замкнутой области описывается следующей системой уравнений:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \Delta U = 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \nu \Delta V = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Здесь (1), (2) – уравнения Навье-Стокса, (3) – уравнение неразрывности движения.

Переходя к безразмерным параметрам, промасштабировав по характерным размерам длины и скорости и вводя функцию тока ψ с помощью следующих

соотношений: $U = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ система (1) – (3) сводится к нелинейному

дифференциальному уравнению в частных производных 4-го порядка относительно функции тока ψ [7].

$$\frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Искомая функция тока зависит от числа Рейнольдса (Re), характеризующего отношение сил инерции к силам вязкости и определяющего интенсивность вынужденной конвекции.

При решении уравнения (4) возникают трудности, связанные с наличием малого параметра при старшей производной ($1/\text{Re}$) и нелинейностью исходного оператора задачи. Наличие малого параметра при старшей производной приводит к большим кривизнам (резкому перепаду градиентов) решения, что соответствует появлению у стенок областей при больших Re пограничного слоя, толщина которого пропорциональна $1/\text{Re}$.

Нелинейность оператора (4), типичная для систем гидродинамического типа, обусловлена в случае несжимаемой жидкости инерционными составляющими в уравнениях количества движения.

Все это приводит при $\text{Re} \gg 1$ к образованию весьма сложных течений и в ряде случаев явление вычислительной неустойчивости трудно отличить от возможного сложного поведения решения.

В большинстве случаев для каждого типа течения в некотором диапазоне чисел Re существует единственное устойчивое стационарное решение уравнений Навье-Стокса, для получения которого можно использовать либо стационарные уравнения, либо нестационарные при $t \rightarrow \infty$ (метод установления).

На входе и выходе задается параболический профиль скорости, а на твердых стенках условие прилипания.

Решение уравнения(4) с такими граничными условиями будем искать в виде: $\psi = \psi_1 + \psi_0$, где

$$\psi_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\psi_i}{w_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i^2}};$$

w_i – участки границы области, которые заданы при помощи R-функций.

ψ_0 и ψ_1 соответственно однородная и неоднородная части структуры.

ψ_0 обеспечивает продолжение граничных условий внутрь области и получено с помощью формулы "склейки".

ψ_1 – неизвестная функция с нулевыми граничными условиями, которая имеет вид $\psi_1 = \omega^2 P$, где P - неопределенная компонента структуры, имеющая вид:

$$P = \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i,$$

где C_i – константы, которые необходимо определить;

φ_i – специальные функции, образующие базис в гильбертовом пространстве, в котором ищется решение.

$$\begin{aligned} \omega &> 0, \quad x \in \text{int } \Omega \\ \omega(x) &< 0, \quad x \in \overline{\Omega} \\ \omega &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

В терминах ψ_1 , ψ_0 уравнение (4) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \Delta \Delta \psi_1 - \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} \right\} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} + \\ + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} = - \frac{1}{Re} \Delta \Delta \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Данное уравнение заменяется на последовательность линейных уравнений [8], построенную по методу Ньютона-Канторовича.

Линеаризация по Ньютону-Канторовичу есть практически линеаризация нелинейного выражения $A(\psi_1)$ (A – оператор задачи) в виде разложения по формуле Тейлора:

$$L = A(\psi_n) + \frac{A(\psi_n + \delta\psi_n) - A(\psi_n)}{\delta\psi_n} \delta\psi_n = \underset{(n=0,1,\dots)}{A}(\psi_n + \delta\psi_n) \quad (6)$$

где $\{\psi_n\}$ – последовательные приближений к решению.

Применим данный процесс к уравнению (5)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta (\psi_n + \delta \psi_n) - \left\{ \frac{\partial (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial x} - \frac{\partial (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial y} \right\} - \\ & - \frac{\partial (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial x} + \frac{\partial (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial y} = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

После преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \delta \psi_n - \left\{ \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_n}{\partial y} - \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y} \right\} - \\ & - \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_n}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Воспользовавшись, $\delta \psi_n = \psi_{n+1} - \psi_n$ окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_{n+1} - \left\{ \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y} \right\} - \\ & - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial y} = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_0 + \\ & + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} - \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9)$$

Задача решается вариационным методом [9], то есть находится минимум функционала, соответствующего оператору задачи. Так как оператор задачи не является положительно-определенным, то минимизируется функционал, построенный по методу наименьших квадратов, то есть приближенное решение понимается в смысле метрики $L_2(\Omega)$.

В качестве начального приближения можно использовать как $\psi_0 = 0$ ($C_i = 0; i = 0, \dots, N$), так и $\psi_0 = \omega^2$ ($C_0 = 1, C_i = 0; i = 1, \dots, N$). Кроме того, оказалось, что с ростом числа Re наиболее эффективным является использование в качестве начального приближения значение функции тока, полученное при другом, меньшем числе Re .

Вычисление диссипированной энергии

Полная механическая энергия в потоке вязкой жидкости не сохраняется, а происходит ее диссипация. Диссипация происходит за счет работы внутренних сил, которая определяется вязкостью. Согласно 2-му закону термодинамики потери механической энергии в виде превращения ее в тепло связано с ростом удельной энтропии среды (s). Приращение энтропии среды определяется 1-м законом термодинамики, который, для несжимаемой жидкости, можно записать в виде равенства [10]:

$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt}$, где u - удельная внутренняя энергия среды.

Уравнение баланса внутренней энергии имеет вид:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho q - N_{\text{вн}}$$

Изменение энтропии в потоке вязкой жидкости может происходить либо за счет притока тепла, либо за счет потерянной мощности внутренних сил ($-N_{\text{вн}}$). Считая движение адиабатическим ($q=0$), увеличение энтропии происходит только за счет потерянной мощности внутренних сил. Количество диссипированной энергии ($N_{\text{дис}} = -N_{\text{вн}}$) равняется скалярному произведению тензора напряжений (P) на тензор скоростей деформаций (\dot{S}):

$$N_{\text{дис}} = P \cdot \dot{S}$$

Обобщенный закон Ньютона дает линейную связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций для несжимаемой вязкой жидкости в виде $P = 2\mu\dot{S} - pE$, где

E - тензорная единица

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})$$

Тогда $N_{\text{дис}} = 2\mu\dot{S}^2 - pE \cdot \dot{S}$

$$E\dot{S} = \text{div}V = 0$$

$$\dot{S}^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = N_{\text{дис}} = 2\mu\dot{S}^2.$$

Мощность внутренних сил вязкости вызывает увеличение энтропии, поэтому работе сил вязкости соответствует необратимый переход механической энергии в тепло, то есть ее диссипация.

Энергия, диссипированная в единицу времени в конечном объеме ξ определяется интегралом $\bar{N}_{\text{дис}} = \int_{\xi} N_{\text{дис}} d\tau = 2\mu \int_{\xi} \dot{S}^2 d\tau$.

После нахождения функции тока, определяется \dot{S}^2 . Так как найденная функция тока имеет аналитический вид, то ее элементарно дифференцировать, без возникновения новых погрешностей, таким образом можно вычислить рассеянную энергию гидротока, и решить задачу гидродинамического нагрева.

Результаты расчетов

Рассматривается гидродинамический теплогенератор, представляющий собой цилиндрическую трубу с гирляндой внутри нее, состоящей из конусов, разрез которого представлен на рисунке 1.



Рис. 1. Схема теплогенератора

Постановка задачи. Решаем уравнение (4) в области Ω , представленной на рисунке 2.

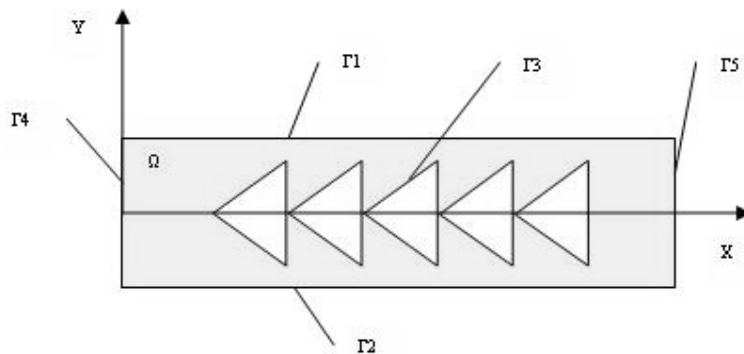


Рис. 2. Область решения задачи

Область Ω описывается уравнением $\omega(x, y) \geq 0$, построенным с помощью R-функций [2].

Для данной области функция $\omega(x, y)$ имеет вид:

$$\omega = (f_1 \wedge_R f_2) \wedge_R (f_3 \vee_R f_4 \vee_R f_5) \wedge_R (f_6 \vee_R f_7 \vee_R f_8) \wedge_R (f_9 \vee_R f_{10} \vee_R f_{11}) \wedge_R (f_{12} \vee_R f_{13} \vee_R f_{14}) \wedge_R (f_{15} \vee_R f_{16} \vee_R f_{17}),$$

где

$$\wedge_R(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — R-конъюнкция;}$$

$$\vee_R(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — R-дизъюнкция;}$$

$$f_1 = x(b - x)/b;$$

$$f_2 = (y + \frac{a}{2})(\frac{a}{2} - y) / a;$$

$$f_3 = x - c - d \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f_4 = -(y + \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d \frac{\sqrt{3}}{2}) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_5 = (y - \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d \frac{\sqrt{3}}{2}) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_6 = x - c - d\sqrt{3} - h;$$

$$f_7 = -(y + \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d\sqrt{3} - h) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_8 = (y - \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d\sqrt{3} - h) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_9 = x - c - d \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2h;$$

$$f_{10} = -(y + \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2h) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_{11} = (y - \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2h) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_{12} = x - c - d \frac{4\sqrt{3}}{2} - 3h;$$

$$f_{13} = -(y + \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d \frac{4\sqrt{3}}{2} - 3h) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_{14} = (y - \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d \frac{4\sqrt{3}}{2} - 3h) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_{15} = x - c - d \frac{5\sqrt{3}}{2} - 4h;$$

$$f_{16} = -(y + \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d \frac{5\sqrt{3}}{2} - 4h) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

$$f_{17} = (y - \frac{d}{2}) \frac{2}{d} + (x - c - d \frac{5\sqrt{3}}{2} - 4h) \left(-\frac{2}{\sqrt{3}d} \right);$$

b – длина трубы;

a – ширина;

d – длина основания треугольника;

c – отступ 1-го треугольника от начала;

h – параметр раздвижки треугольников.

Исходя из физической постановки задачи, граничные условия имеют следующий вид:

$$\text{На } \Gamma 1: \psi = \frac{a}{3}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

$$\text{На } \Gamma 2: \psi = -\frac{a}{3}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

$$\text{На } \Gamma 3: \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

$$\text{На } \Gamma 4: \psi = y - \frac{4y^3}{3a^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

$$\text{На } \Gamma 5: \psi = y - \frac{4y^3}{3a^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

На рисунке 3 изображена функция $\omega(x, y)$ в виде изолиний.

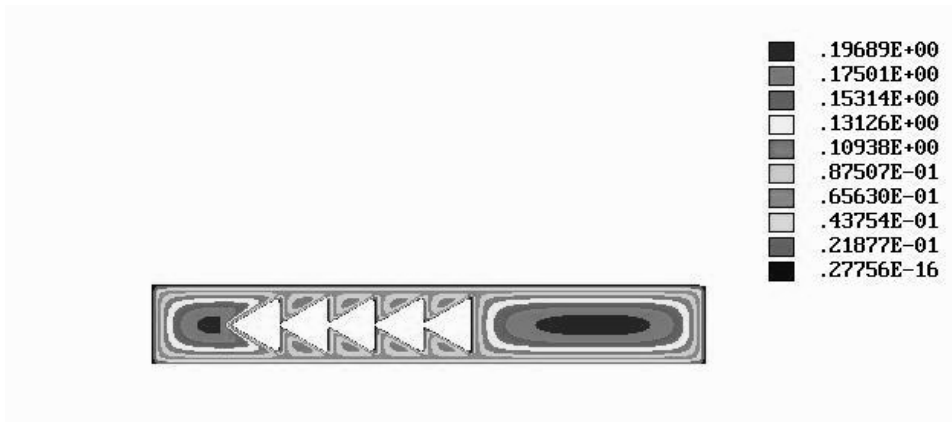


Рис. 3. Функция $\omega(x, y)$.

На рис. 4 изображена функция $\psi_0(x, y)$, удовлетворяющая точно всем граничным условиям.



Рис. 4. Функция $\psi_0(x, y)$.

На рисунках (5) и (6) показаны результаты вычислительного эксперимента, при обтекании одного элемента теплообменника. На рисунке 5 – функция модуля скорости, при $Re = 200$. На рисунке 6 – функция тока, при $Re = 200$.

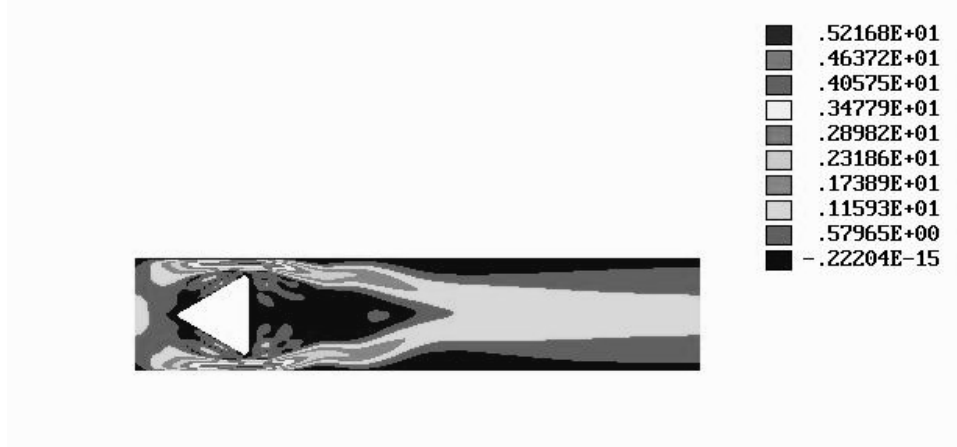


Рис.5. Функция модуля скорости ($Re=200$).

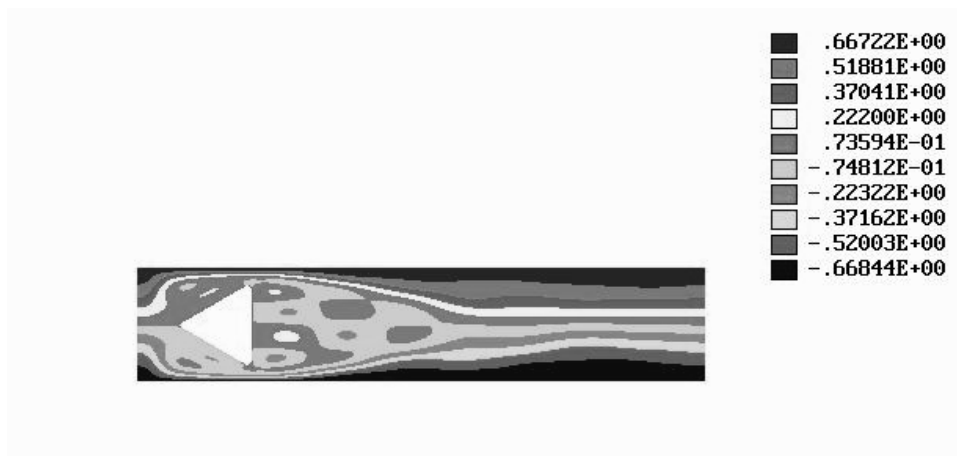


Рис.6. Функция тока ($Re=200$).

Выводы

Проведенное математическое моделирование процесса течения рабочего тела по теплогенератору дает метод получения количественной оценки, за счет гидравлических пульсаций, возвратных течений, реверсивного движения. Соответствующий вычислительный алгоритм нахождения диссипированной энергии и нагрева жидкости в канале реализован единым программным комплексом на базе системы POLE. Универсальность метода и программы позволяют проводить многопараметрические численные эксперименты для различных теплогенераторов.

Количественная оценка влияния эффектов генерации избыточной энергии может быть использована как при разработке новых конструкций теплогенераторов, так и модернизации существующих.

Развитый метод в дальнейшем можно модифицировать для целей математического моделирования сложной теплогидродинамики других технических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халатов А.А., Онищенко В.Н. Диаграмма режимов течения в одиночном сферическом углублении с острой кромкой // Промышленная теплотехника. – 2005. – Т27. – №4. – С. 5 – 10.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. –Киев: Наук. думка, 1982. –552 с.
3. Суворова И.Г. Автоматизация расчетов методом R-функций применительно к задачам стройиндустрии: Учеб.пособие /Суворова И.Г., Шевченко А.Н. –Киев: Учеб.–метод. Каб. Высш. Образования, 1991.– 60с.
4. Рвачев В.Л. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R-функций в системе ПОЛЕ-3 /Рвачёв В.Л., Суворова И.Г., Шейко Т.И. // Мат. методы и физ.-мех. поля.– Львов, 1991.–№ 33. – С.95-99.
5. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы //Вестник НТУ ХПИ. – Харьков, 2004. – №31. – С.141–148.
6. Суворова И.Г. Математическое моделирование потока жидкости методом R-функций / И.Г. Суворова, О.В. Кравченко // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2006. – Випуск 4 (45). – С. 57 – 69.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика т.6, Гидродинамика. – М. Наука, 1988.- 736 с.
8. Суворова И.Г. Метод R-функций в исследованиях и расчетах физико-механических полей для задач строительства: Автореф. дис... д-ра техн. наук. – Харьков, 1991. – 21с.
9. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М. Наука, 1970.- 512 с.
10. Лыков А.В Теория теплопроводности. М. Высшая школа. 1967. – 423 с.