

Численное решение интегрального уравнения
задачи обтекания тонкого непроницаемого профиля
с отсосом внешнего потока

Р. С. Белорозов, А. Ф. Матвеев

*ФГУ «46 Центральный научно-исследовательский институт Минобороны РФ», Россия
Военно-воздушная инженерная академия имени профессора Н.Е.Жуковского, Россия*

In the present article method of numeral solution of a first kind the boundary Cashy integral equation with fixed hypersingularity was suggested. This equation appears in task of streamline of a profile with aspiration of outside blast. Realization of the new method is demonstrated by the model examples.

1. Введение

Аппарат интегральных уравнений широко применяется при решении многих задач науки и техники. Значительный круг задач аэродинамики, теории упругости, дифракции и других областей знаний при моделировании удобно сводить к граничным интегральным уравнениям.

В задачах теории упругости граничные интегральные уравнения используются для вычисления тензора напряжений. В задачах аэродинамики они применяются для вычисления интенсивности вихревого слоя на поверхности обтекаемых газом тел. В задачах электронной оптики и газовых разрядов граничные интегральные уравнения привлекаются для вычисления потока эмиссии с отрицательного электрода. В теории скин-эффекта интегральными уравнениями описывается плотность тока, текущего по проводящим телам трехмерного пространства.

Главным достоинством метода граничных интегральных уравнений является его экономичность. Он позволяет понизить размерность решаемой краевой задачи математической физики, то есть свести исходную задачу к интегральному уравнению по кривым, на которых заданы краевые и дополнительные условия.

При этом большой популярностью пользуются математические модели, описываемые интегральными уравнениями Фредгольма, интегральными уравнениями со слабой особенностью в ядре и линейными сингулярными интегральными уравнениями с ядром Коши и Гильберта. Это обусловлено хорошо развитой теорией указанных интегральных уравнений, а также значительными продвижениями, полученными в вопросах построения и обоснования вычислительных схем приближенного решения таких интегральных уравнений.

Однако в последние годы ряд прикладных задач сводится к интегральным уравнениям с сильной особенностью, содержащим гиперсингулярные интегралы и понимаемым в смысле конечной части расходящегося интеграла по Адамару. При этом одни прикладные задачи сводятся к интегральным уравнениям, содержащим плавающую гиперсингулярность, а другие – к сингулярным

интегральным уравнениям, допускающим в одной или в нескольких фиксированных точках области интегрирования гиперсингулярную особенность. В первом из этих случаев будем использовать термин – гиперсингулярные интегральные уравнения (ГИУ) [1-4], а во втором – сингулярные интегральные уравнения (СИУ) с фиксированной гиперсингулярностью [2, 3]. В отличие от интегральных уравнений Фредгольма, а также линейных СИУ с ядром Коши и Гильберта указанные выше ГИУ изучены не достаточно. Поэтому на пути математического моделирования прикладных задач с помощью этих уравнений возникает множество проблем, некоторые из которых решаются в настоящей работе.

Ниже остановимся более подробно на одной прикладной задаче аэродинамики, сводящейся к СИУ с фиксированной гиперсингулярностью, правая часть которого имеет неинтегрируемые особенности в конечном числе внутренних точек отрезка интегрирования.

В последнее время в аэродинамике большое внимание уделяется исследованиям связанным с использованием энергетических средств механизации летательных аппаратов. Однако, не смотря на большой интерес со стороны специалистов отношение к энергетическим методам управления летательными аппаратами из-за большой «энергоёмкости» и сложности исследования до недавнего времени было довольно скептическим. Но достигнутые к настоящему времени успехи в создании современных силовых установок и развитие теоретических методов исследования математических моделей аэродинамики позволяют рассматривать энергетические методы управления летательным аппаратом как реальные уже в ближайшей перспективе.

В данной работе исследуются интегральные уравнения математической модели аэродинамики, использующей в качестве энергетических средств механизации отсос внешнего потока с поверхности профиля.

Посредством такой механизации возможно создание энергетического предкрылка, увеличивающего угол атаки, допускающий безотрывное обтекание крыла. Другой характеристикой, на которую можно воздействовать с помощью отсоса внешнего потока является циркуляция скорости вокруг крыла, что, в конечном итоге, приводит к воздействию на коэффициент его подъемной силы.

Ведутся исследования и по использованию отсоса внешнего потока с поверхности крыла в качестве борьбы с концевыми вихрями спутного следа, образующимися при полете самолета и представляющими серьезную опасность для находящихся поблизости других летательных аппаратов.

В данной работе предлагается метод численного решения граничного интегрального уравнения задачи обтекания тонкого изолированного профиля с отсосом внешнего потока. Решаемое интегральное уравнение рассматривается в классе обобщенных функций, а его правая часть содержит δ -функцию Дирака с носителем в точке отсоса внешнего потока. Предлагаемый нами метод отличается от используемых ранее повышенной степенью сходимости приближенного решения к точному.

Ниже приводится описание и сравнительный анализ расчетов, проведенных по предлагаемому нами методу и известным методам используемым ранее.

2. Основные понятия и обозначения

Далее мы будем применять следующие понятия и обозначения.

Пусть $w_q(x) = \frac{1}{x-q}$, $w_{pq}(x) = \frac{1}{(x-p)(x-q)}$, $-1 < p < q < 1$. Используя

определения и обозначения [1-4] введем следующие классы действительных функций, заданных на отрезке $[-1; 1]$:

h - функции непрерывные по Гёльдеру на отрезке $[-1; 1]$;

h_* - функции непрерывные по Гёльдеру на любом отрезке, вложенном в $[-1; 1]$, а вблизи концов $c = \pm 1$, представимых в виде $\frac{f(x)}{(x-c)^\alpha}$, где $0 \leq \alpha < 1$,

$f(x) \in h$ на отрезке $[-1; 1]$;

$h_{q^*} = \{\varphi: \varphi = \psi w_q, \psi \in h_*\}$;

$h_{pq^*} = \{\varphi: \varphi = \psi w_{pq}, \psi \in h_*\}$.

Множество h_{q^*} разобьем на классы, характеризующие поведение функции на концах отрезка $[-1; 1]$:

$h_q(\infty)$ - класс функций из h_{q^*} , неограниченных вблизи концов $x = -1$ и $x = 1$;

$h_q(c)$ - класс функций из h_{q^*} , ограниченных вблизи конца $x = c$, где $c = -1$ или $c = 1$;

$h_q(-1; 1)$ - класс функций из h_{q^*} , ограниченных вблизи концов $x = -1$ и $x = 1$.

Аналогично разобьем множество функций h_* на классы:

$h(\infty)$ - класс функций из h_* , неограниченных вблизи концов $x = -1$ и $x = 1$;

$h(c)$ - класс функций из h_* , ограниченных вблизи конца $x = c$, где $c = -1$ или $c = 1$;

$h(-1; 1)$ - класс функций из h_* , ограниченных вблизи концов $x = -1$ и $x = 1$.

$$\delta(x_0 - q) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(x_0 - q), \text{ где } \delta_h(x_0 - q) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_0 \in \left[q - \frac{h}{2}; q + \frac{h}{2} \right] \\ 0, & x_0 \notin \left[q - \frac{h}{2}; q + \frac{h}{2} \right] \end{cases}$$

Введем пространство функций определенных на $[-1; 1]$ квадрат модуля, которых интегрируемых с весом $\rho(x) \geq 0$ на отрезке $[-1; 1]$:

$$L_{2,\rho}([-1; 1]) = \left\{ f : \int_{-1}^1 \rho(x) |f(x)|^2 dx < \infty \right\}, \rho(x) \geq 0, x \in [-1, 1].$$

Пространство функций $L_{2,\rho}([-1; 1])$ со скалярным произведением:

$$(f; g) = \int_{-1}^1 \rho(x) f(x) g(x) dx, \quad g, f \in L_{2,\rho}([-1; 1])$$

становится гильбертовым. В нем имеется полная ортонормированная система базисных функций $P_n(x)$ относительно которой любая функция $\varphi(x) \in L_{2,\rho}([-1; 1])$ представима рядом

$$\varphi(x) = \sum \tilde{\varphi}(n) P_n(x), \quad \text{где} \quad \tilde{\varphi}(n) = \int_{-1}^1 \rho(x) \varphi(x) P_n(x) dx.$$

Норма функций $\varphi(x)$ в данном гильбертовом пространстве определяются формулой

$$\|\varphi(x)\|_{2,\rho}^2 = \int_{-1}^1 \rho(x) |\varphi(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{\varphi}(n)|^2 < \infty$$

Следуя [4, 5], с пространством $L_{2,\rho}([-1; 1])$ свяжем пространство $H_{\lambda,\rho}([-1; 1])$ типа соболевского.

Определение. Пусть $\lambda \in R$ - произвольное действительное число. Весовым пространством $H_{l,r} = H_{l,r}(\{P_n(x)\})$ на $[-1; 1]$ будем называть множество таких функций (или обобщенных функций для $\lambda < 0$) $u(x)$, что функция

$$u_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{n}^\lambda \hat{u}(n) P_n(x), \quad \text{где} \quad \hat{u}(n) = \int_{-1}^1 \rho(x) u(x) P_n(x) dx = (u(x); P_n(x)),$$

принадлежит пространству $L_{2,\rho}$, где $\underline{n} = \max\{1; n\}$. Нормой функции $u(x)$ в

пространстве $H_{l,r}$ назовем число $\|u(x)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{n}^{2\lambda} |\hat{u}(n)|^2$. Скалярным

произведением функций $u(x)$ и $v(x)$ из пространства $H_{l,r}$ будем называть

$$(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{n}^{2\lambda} \hat{u}(n) \hat{v}(n).$$

Относительно этого скалярного произведения пространство $H_{l,r}$ становится гильбертовым.

3. Постановка задачи

Сингулярные интегральные уравнения (СИУ) первого рода с фиксированной гиперсингулярностью возникают в процессе математического моделирования задачи обтекания профиля с отсосом внешнего потока с поверхности профиля. Своеобразие данной задачи состоит в том, что на верхней стороне обтекаемого профиля (на L^+) индуцированное поле скоростей имеет особенность типа стока, а на нижней стороне (на L^-) оно остается гладким. Это приводит к появлению двух подходов построения граничного интегрального уравнения данной задачи.

В одном из них при выполнении граничного условия непротекания на поверхности профиля L^+ с той его стороны, где расположен отсос, получают СИУ, правая часть которого является гладкой функцией. Полученное интегральное уравнение рассматривают на множестве внутренних точек отрезка интегрирования за исключением точки отсоса q , в которой интенсивность вихревого слоя имеет неинтегрируемую особенность вида $w_q(x)$.

Требование сильной особенности искомой интенсивности вихревого слоя в точке отсоса q возникает в результате анализа касательных составляющих поля скоростей в точках профиля.

Описанный подход построения граничного интегрального уравнения принято называть традиционным. Полученное традиционным подходом граничное уравнение следует понимать в смысле определения СИУ с фиксированной гиперсингулярностью данного в [2, 3].

Слабым звеном описанного подхода является недоопределенность построенного граничного интегрального уравнения. Выделение нужного единственного решения интегрального уравнения в этом случае осуществлялось на этапе его дискретизации, что приводило к определенным неудобствам.

В [2] (см. также [3]) предлагается новая редакция традиционного подхода, приводящая к однозначно разрешимой системе интегральных уравнений. Программная реализация новой редакции традиционного подхода выполнена авторами настоящей работы [6].

Позднее при моделировании рассматриваемой задачи получил распространение другой, так называемый, нетрадиционный подход, при котором граничное условие непротекания выполняется на стороне профиля противоположной расположению отсоса. При этом возникает СИУ, левая часть которого совпадает с левой частью интегрального уравнения построенного по традиционной схеме. Полученное нетрадиционным способом интегральное уравнение рассматривается на всем множестве внутренних точек отрезка интегрирования, включая и точку отсоса. Однако в правой части этого СИУ появляется дельта-функция с носителем в точке отсоса внешнего потока. Поэтому данный интегральный оператор надо понимать в смысле теории псевдодифференциальных операторов. Рассматривая его в пространствах $H_{\lambda, \rho}$ (типа соболевских с весом) в [4] показано, что решение СИУ нашей задачи, полученное нетрадиционным способом, также имеет неинтегрируемую особенность вида $w_q(x)$ в точке отсоса внешнего потока.

Однако скорость сходимости полученного этим методом приближенного решения не велика. Она такая же, как скорость сходимости метода дискретных вихрей с равномерным распределением узлов.

Авторами настоящей работы предлагается новый метод решения граничного интегрального уравнения, полученного при нетрадиционном подходе, позволяющий увеличить скорость сходимости приближенного решения к точному. Данный метод будем называть методом наложения.

4. Метод наложения

Суть метода наложения состоит в редукции задачи построенного по нетрадиционной схеме граничного интегрального уравнения

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{x-x_0} dx = -f(x_0) - Qd(x_0 - q) \quad q, x_0 \in (-1, 1) \quad (1)$$

к равносильной ей, в определенном смысле, задаче решения уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{x-x_0} = -f(x_0). \quad (2)$$

Данная редукция сводит задачу решения СИУ (1) в классе h_{q^*} с сильной особенностью в правой части к задаче решения СИУ (2) в классе h_* с гладкой правой частью. Это, в свою очередь, дает возможность применить вычислительную схему метода дискретных вихрей с неравномерным распределением узлов для приближенного решения СИУ (2) (к уравнению (1) эта вычислительная схема не применима).

Все это в итоге позволяет нам существенно повысить скорость сходимости приближенного решения к точному.

При этом следует заметить, что в случае бесциркуляционного обтекания профиля СИУ (1) имеет не единственное решение и нуждается в доопределении. А в случае безударного обтекания уравнение (1) разрешимо только при выполнении дополнительного условия на правую часть и поэтому нуждается во введении регуляризирующей переменной И.К.Лифанова [1].

Далее перейдем к подробному описанию вычислительной схемы метода наложения для каждого из трех имеющих место режимов обтекания профиля с отсосом внешнего потока.

4.1 Случай бесциркуляционного обтекания

При моделировании тонкого, изолированного, разомкнутого профиля вихревым слоем в случае бесциркуляционного обтекания с отсосом внешнего потока, используя нетрадиционную схему выполнения условия непротекания, приходим к системе уравнений [4]

$$\begin{cases} \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{x-x_0} dx = -f(x_0) - Qd(x_0 - q) \\ \int_{-1}^1 g(x) dx = 0 \end{cases} \quad (3)$$

в которой константа Q характеризует интенсивность отсоса внешнего потока в точке $q \in (-1, 1)$. Решение данной системы ищется в классе функций $h_q(\infty)$, обращающихся на обоих концах отрезка $[-1; 1]$ в бесконечность и имеющих в

точке отсоса $q \in (-1, 1)$ особенность вида $w_q(x)$. При этом интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\gamma(x) dx}{x-x_0}$

следует рассматривать как оператор, действующий из пространства H_{l,r_1} в

H_{l,r_2} , где $\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\rho_2 = \sqrt{1-x^2}$, $\lambda < -\frac{1}{2}$. Функция $f(x_0)$ удовлетворяет

условию Гельдера и принадлежит классу $L_{2;\rho}$. При данных условиях единственное решение $\gamma(x)$ системы уравнений (3) имеет вид

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2} f(x_0) dx_0}{x_0 - x} - \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{Q}{x-q}, \quad x \in (-1; 1)$$

Для построения численного решения системы (3) в [4] по наперед заданному натуральному числу n строится два множества дискретных точек $h_n = \{x_k, k = \overline{0, n}\}$ и $h_{0n} = \{x_{0j}, j = \overline{0, n}\}$ удовлетворяющих условиям:

$$|x_{k+1} - x_k| = h, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad h = \frac{2}{n+1},$$

$$|x_{0j+1} - x_{0j}| = h, \quad j = \overline{0, n-1},$$

$$x_1 - x_{00} = \frac{h}{2}, \quad x_{0k} = x_k + \frac{h}{2}, \quad k = \overline{1, n}$$

$$x_{00} + 1 = h \cdot q_{1,h}, \quad 1 - x_{00} = h \cdot q_{2,h}, \quad 0 < p_1 \leq q_{1,h}, \quad q_{2,h} \leq p_2 < \infty.$$

При этом p_1 и p_2 - заданные числа и точка отсоса $q = x_{0j_q}$ при любом n лежит на множестве h_{0n} .

Численное решение системы (3) на сетке h_n в [4] получают из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_n(x_k) h}{x_k - x_{0j}} = -f(x_{0j}) - Q \delta(x_{0j} - q) \\ \sum_{k=1}^n \gamma_n(x_k) h = 0 \end{cases} \quad (4)$$

При этом точное решение системы (3) и решение СЛАУ (4) связаны соотношением

$$|\gamma(x_k) - \gamma_n(x_k)| \leq \Theta_n(x_k), \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

в котором величина $\Theta_n(x_k)$ удовлетворяет неравенствам:

для всех точек $x_k \in [-1 + \delta, q - \delta] \cup [q + \delta, 1 - \delta]$, где $\delta > 0$ - сколь угодно малое число

$$\Theta_n(x_k) \leq A_\delta h^{\lambda_1}, \quad \lambda_1 > 0 \quad (6)$$

для всех точек $x_k \in [-1, 1]$

$$\sum_{k=1}^n \Theta_n(x_k) h \leq Ah^{\lambda_2}, \lambda_2 > 0 \quad (7)$$

где A_δ, A - некоторые константы, независимые от n .

Такая степень сходимости приближенного решения к точному является характерной для метода дискретных вихрей решения СИУ с равномерным распределением узлов.

Для приближенного решения системы (3) методом наложения искомое решение этой системы представим в виде:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \left[u(x) - \sqrt{1-q^2} \frac{Q}{x-q} \right] \quad (8)$$

где $u(x)$ - новая неизвестная функция, $u(x) \in h_n$ и является решением системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{x-x_0} = -f(x_0) \\ \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Численное решение (9) найдем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{u_n(x_k) a_k}{x_k - x_{0j}} = -f(x_{0j}) \quad j = \overline{0, n-1} \\ \sum_{k=1}^n u_n(x_k) a_k = 0 \end{cases} \quad (10)$$

где $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, $a_k = \frac{\pi}{n}$, $x_{0j} = \cos\left(\frac{j}{n}\pi\right)$.

Подставляя $u_n(x_k)$ из решения системы (10) в формулу (8) вместо $u(x)$ при $k = \overline{1, n}$, получим значения приближенного решения системы (3) в точках x_k . Построенное таким образом приближенное решение системы (3) имеет интерполяционную степень точности.

4.2 Случай циркуляционного обтекания

В случае циркуляционного обтекания гладкого, слабоизогнутого, тонкого, изолированного, непроницаемого профиля с отсосом внешнего потока при нетрадиционном выполнении условия непротекания сквозь поверхность профиля возникает граничное СИУ

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{x-x_0} dx = -f(x_0) - Qd(x_0 - q) \quad q, x_0 \in (-1, 1) \quad (11)$$

При этом решение уравнения (11) ищется в классе функций, обращающихся в бесконечность на левом конце отрезка интегрирования и равном нулю на правом его конце. В точке отсоса q решение имеет особенность вида $w_q(x)$, а интегральный оператор действует из пространства H_{λ, ρ_3} в пространство H_{λ, ρ_4} , где $\rho_3 = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\rho_4 = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $\lambda < -\frac{1}{2}$. При данных условиях решение уравнения (11) единственно и имеет вид [4]

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{f(x_0) dx_0}{x_0 - x} - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \frac{Q}{x-q}, \quad x \in (-1; 1)$$

Численное решение СИУ (11) на сетке h_n в [4] получают из системы

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_n(x_k) h}{x_k - x_{0j}} = -f(x_{0j}) - Q \delta_n(x_{0j} - q), \quad j = \overline{1, n} \quad (12)$$

При этом точное решение СИУ (11) и решение системы линейных алгебраических уравнений (12) связаны соотношением (5), в котором величина $\Theta_n(x_k)$ удовлетворяет неравенствам (6) и (7).

Метод наложения редуцирует задачу решения граничного интегрального уравнения (11) в соответствующем классе обобщенных функций к задаче решения интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{u_0(x) dx}{x - x_0} = -f(x_0), \quad j = \overline{0, n} \quad (13)$$

Применяя к уравнению (13) метод дискретных вихрей приближенного решения СИУ с неравномерным распределением узлов, из СЛАУ

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{u_{n0}(x_k) a_k}{x_k - x_{0j}} = -f(x_{0j}),$$

где $x_k = \text{Cos}\left(\frac{2k}{2n+1}\pi\right)$, $a_k = \frac{4\pi}{2n+1} \text{Sin}^2\left(\frac{k}{2n+1}\pi\right)$, $x_{0j} = \text{Cos}\left(\frac{2j-1}{2n+1}\pi\right)$.

по формуле

$$\gamma(x_k) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x_k}{1+x_k}} \left[u_{n0}(x_k) - \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \frac{Q}{x-q} \right], \quad k = \overline{1, n}$$

получим приближенное решение исходного СИУ (11), имеющее интерполяционную степень точности.

4.3 Случай безударного обтекания

При моделировании тонкого, изолированного, разомкнутого, непроницаемого профиля вихревым слоем в случае безударного обтекания с отсосом внешнего потока, используя нетрадиционное условие непротекания, приходим вновь к уравнению (11). При этом решение уравнения (11) ищется в

классе функций $\gamma(x) \in h_q(-1;1)$, функция $f(x_0)$ - гельдеровская на $[-1;1]$, а интегральный оператор уравнения (11) действует из пространства H_{λ, ρ_2} в H_{λ, ρ_1} , $\lambda < -\frac{1}{2}$. В данном режиме обтекания к уравнению (11) следует добавить условие разрешимости

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x_0) + Q\delta(x_0 - q)}{\sqrt{1-x_0^2}} dx_0 = 0 \quad (14)$$

Из (14) следует, что интенсивность отсоса, обеспечивающего безударное обтекание профиля, характеризуется значением константы

$$Q = -\sqrt{1-q^2} \int_{-1}^1 \frac{f(x_0) dx_0}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

Численное решение СИУ (11) в требуемом классе функций в [4] получают из системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi} \gamma_{0n} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_n(x_k) h}{x_k - x_{0j}} = -f(x_{0j}) - Q\delta_h(x_{0j} - q), \quad j = \overline{1, n} \quad (15)$$

где γ_{0n} - регуляризирующая переменная И.К.Лифанова [1]. При этом решение системы (15) и точное решение СИУ (11) в классе функций $h_q(-1;1)$

$$\gamma(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x_0) dx_0}{\sqrt{1-x_0^2}(x_0-x)} - \frac{Q}{\pi} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-q^2}} \frac{1}{x-q}, \quad (16)$$

связаны соотношением (5), в котором величина $\Theta_n(x_k)$ удовлетворяет неравенствам (6) и (7).

Для построения приближенного решения исходной задачи в режиме безударного обтекания методом наложения рассмотрим СИУ

$$\frac{1}{\pi} \gamma_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} u(x) dx}{x-x_0} = -f(x_0) \quad (17)$$

с решением в классе функций $\gamma_{-1}(x) = \sqrt{1-x^2} u(x) \in h_q(-1;1)$. Численное решение интегрального уравнения (17) найдем из системы

$$\frac{1}{\pi} \gamma_{0n} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{u_{n;-1}(x_k) a_k}{x_k - x_{0j}} = -f(x_{0j}), \quad j = \overline{1, n+1} \quad (18)$$

где $x_k = \text{Cos}\left(\frac{k}{n+1}\pi\right)$, $a_k = \frac{\pi}{n+1} \text{Sin}^2\left(\frac{k}{n+1}\pi\right)$, $x_{0j} = \text{Cos}\left(\frac{2j-1}{2(n+1)}\pi\right)$.

Подставляя значения функции $u_{n;-1}(x)$ в узлах $x_k = \overline{1, n}$, полученные из системы (18), в формулу

$$\gamma(x_k) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1-x_k^2} \cdot u_{n;-1}(x_k) - \frac{Q \sqrt{1-x_k^2}}{\pi \sqrt{1-q^2}} \frac{1}{x_k - q}$$

получим приближенное решение исходной задачи в режиме безударного обтекания.

5. Результаты расчетов

В данном пункте проводится сравнительный анализ методов численного решения граничных интегральных уравнений задачи обтекания профиля с отсосом внешнего потока в режимах: бесциркуляционного, циркуляционного и безударного обтекания. При этом вычислительные схемы метода наложения, описанные в настоящей работе, сравниваются с вычислительными схемами, предложенными в [4], и точными решениями, имеющими место при определенных значениях исходных данных.

5.1 Случай бесциркуляционного обтекания профиля

Пусть в системе интегральных уравнений (3) $q = 0,8$, $f(x_0) = 0,2$, $Q = 1$, тогда ее точное решение имеет вид

$$\gamma(x) = -\frac{0,2 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{0,6}{\pi \sqrt{1-x^2}} \frac{1}{x-0,8}$$

Сравнительный анализ результатов численного решения (3), полученных методом наложения и методом работы [4], при указанных исходных данных представлен на рисунке 1 и в таблице 1.

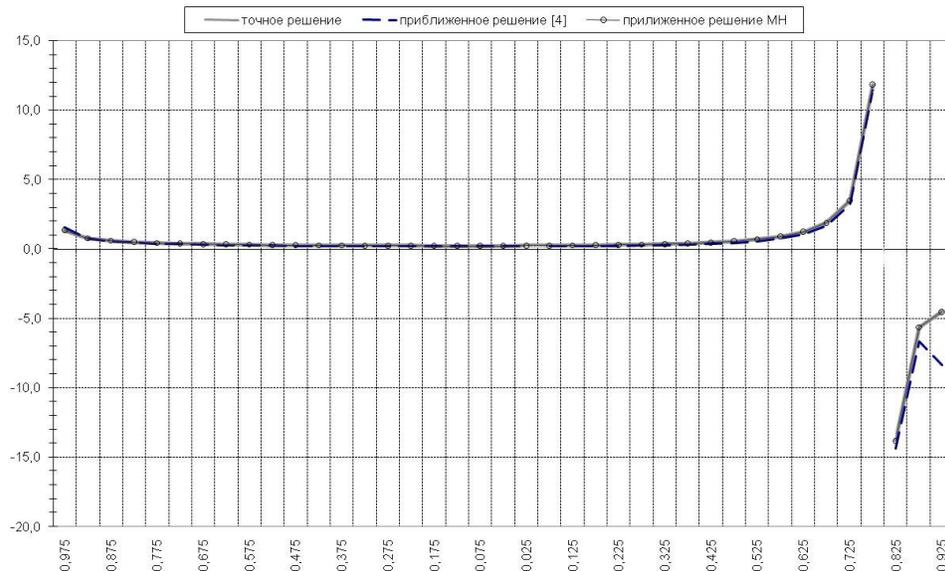


Рис1. Графическая интерпретация результатов моделирования процесса бесциркуляционного обтекания профиля

Табл. 1 – Оценка сходимости метода наложения в случае бесциркуляционного обтекания профиля

| Характерные точки | Точное решение | Метод, описанный в работе [4] | | | Метод наложения | |
|-------------------|----------------|-------------------------------|-----------------------------|--|-----------------------------|--|
| | | $\gamma(x)$ | $ \gamma(x) - \gamma_m(x) $ | $\frac{ \gamma(x) - \gamma_m(x) }{0,01 \cdot \gamma_m(x)}$ | $ \gamma(x) - \gamma_m(x) $ | $\frac{ \gamma(x) - \gamma_m(x) }{0,01 \cdot \gamma_m(x)}$ |
| -0,975 | 1,362 | 1,600 | 0,238 | 17,5 | 0,000 | 0,0 |
| -0,925 | 0,778 | 0,789 | 0,011 | 1,4 | 0,000 | 0,0 |
| -0,875 | 0,597 | 0,584 | 0,013 | 2,2 | 0,000 | 0,0 |
| 0,725 | 3,487 | 3,244 | 0,243 | 7,0 | 0,000 | 0,0 |
| 0,775 | 11,843 | 11,503 | 0,340 | 2,9 | 0,000 | 0,0 |
| 0,825 | -13,810 | -14,341 | 0,531 | 3,8 | 0,000 | 0,0 |
| 0,875 | -5,621 | -6,646 | 1,024 | 18,2 | 0,000 | 0,0 |
| 0,925 | -4,508 | -8,340 | 3,832 | 85,0 | 0,000 | 0,0 |

Как видно из рисунка 1, в случае бесциркуляционного обтекания приближенное решение, полученное методом наложения, полностью совпадает с точным. При этом приближенное решение методом работы [4] несколько отличается от точного в окрестностях точек: -1, q и 1 (см. таблицу 1).

5.2. Случай циркуляционного обтекания профиля

Пусть в граничном СИУ (11) $q = 0,8$, $f(x_0) = 0,2$, $Q = 1$, тогда его решение в классе функций $h_q(1)$ имеет вид

$$\gamma(x) = 0,2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{3\sqrt{1-x}}{\pi\sqrt{1+x}} \frac{1}{x-0,8}$$

Сравнительный анализ результатов численного решения (11), полученных методом наложения и методом работы [4], при указанных исходных данных представлен на рисунке 2 и в таблице 2.

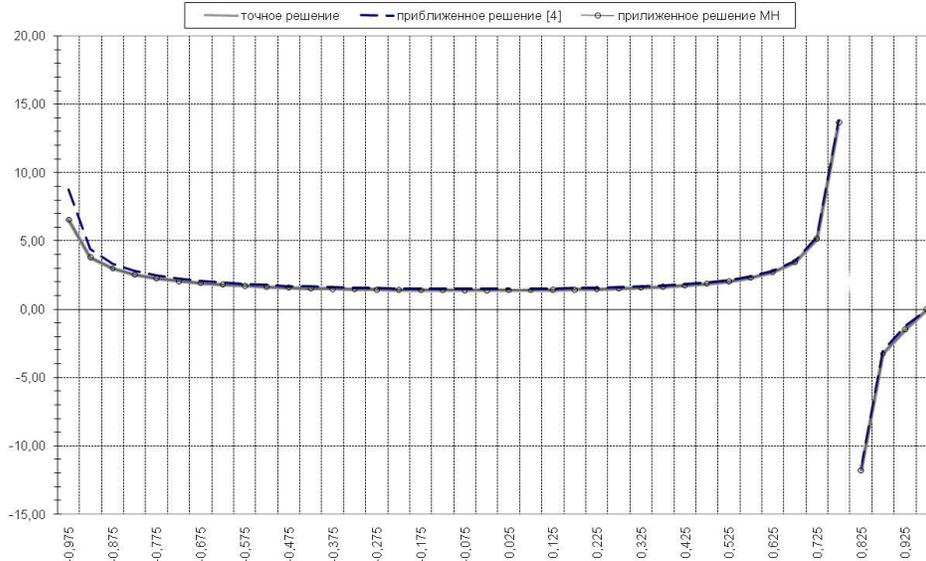


Рис.2. Графическая интерпретация результатов моделирования процесса циркуляционного обтекания профиля

Табл. 2 – Оценка сходимости метода наложения в случае циркуляционного обтекания профиля

| Характерные точки | Точное решение | Метод, описанный в работе [4] | | | Метод наложения | |
|-------------------|----------------|-------------------------------|-----------------------------|--|-----------------------------|--|
| | | $\gamma(x)$ | $ \gamma(x) - \gamma_m(x) $ | $\frac{ \gamma(x) - \gamma_m(x) }{0,01 \cdot \gamma_m(x)}$ | $ \gamma(x) - \gamma_m(x) $ | $\frac{ \gamma(x) - \gamma_m(x) }{0,01 \cdot \gamma_m(x)}$ |
| -0,975 | 6,5594 | 8,7594 | 2,2000 | 33,5 | 0,0000 | 0,0 |
| -0,925 | 3,8178 | 4,4165 | 0,5987 | 15,7 | 0,0000 | 0,0 |
| -0,875 | 2,9826 | 3,3416 | 0,3590 | 12,0 | 0,0000 | 0,0 |
| 0,725 | 5,1636 | 5,3123 | 0,1487 | 2,9 | 0,0000 | 0,0 |
| 0,775 | 13,6707 | 13,8337 | 0,1630 | 1,2 | 0,0000 | 0,0 |
| 0,825 | -11,7663 | -11,5825 | 0,1838 | 1,6 | 0,0000 | 0,0 |
| 0,875 | -3,2359 | -3,0177 | 0,2182 | 6,7 | 0,0000 | 0,0 |
| 0,925 | -1,4684 | -1,1798 | 0,2886 | 19,7 | 0,0000 | 0,0 |

Как видно из рисунка 2, в случае циркуляционного обтекания приближенное решение, полученное методом наложения, полностью совпадает с точным. При этом приближенное решение методом работы [4] имеет погрешность в окрестностях точек $x = -1$, $x = 0,8$ (см. таблицу 2)

5.3 Случай безударного обтекания профиля

Рассмотрим задачу решения СИУ (11) в классе функций $h_q(-1;1)$ при $q = 0$, $f(x_0) = x_0$, $Q = 0,2$. Его точное решение задается формулой

$$\gamma(x) = -\sqrt{1-x^2} \left(1 - \frac{0,2}{\pi x} \right)$$

Сравнительный анализ результатов численного решения данного интегрального уравнения, полученных методом наложения и методом работы [4], при указанных исходных данных приведен на рисунке 3 и в таблице 3.

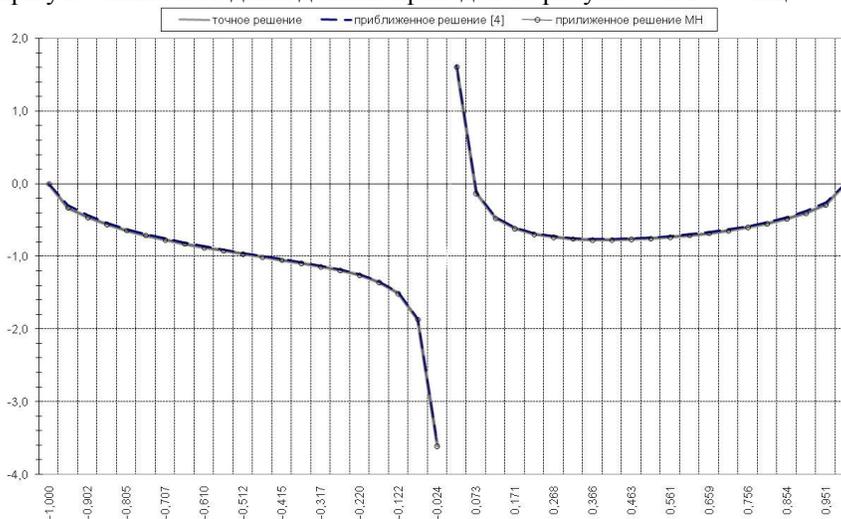


Рис.3. Графическая интерпретация результатов моделирования процесса безударного обтекания профиля

Табл. 3 – Оценка сходимости метода наложения в случае безударного обтекания профиля

| Характерные точки | Точное решение $\gamma_m(x)$ | Метод, описанный в работе [4] | | | Метод наложения | |
|-------------------|------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|--|-----------------------------|--|
| | | $\gamma(x)$ | $ \gamma(x) - \gamma_m(x) $ | $\frac{ \gamma(x) - \gamma_m(x) }{0,01 \cdot \gamma_m(x)}$ | $ \gamma(x) - \gamma_m(x) $ | $\frac{ \gamma(x) - \gamma_m(x) }{0,01 \cdot \gamma_m(x)}$ |
| -0,951 | -0,329 | -0,291 | 0,038 | 11,6 | 0,000 | 0,0 |
| -0,902 | -0,461 | -0,433 | 0,029 | 6,2 | 0,000 | 0,0 |
| -0,854 | -0,560 | -0,536 | 0,024 | 4,3 | 0,000 | 0,0 |
| -0,073 | -1,865 | -1,853 | 0,012 | 0,7 | 0,000 | 0,0 |
| -0,024 | -3,609 | -3,597 | 0,012 | 0,3 | 0,000 | 0,0 |
| 0,024 | 1,610 | 1,622 | 0,012 | 0,8 | 0,000 | 0,0 |
| 0,073 | -0,130 | -0,118 | 0,012 | 9,3 | 0,000 | 0,0 |
| 0,854 | -0,482 | -0,460 | 0,022 | 4,5 | 0,000 | 0,0 |
| 0,902 | -0,400 | -0,375 | 0,026 | 6,4 | 0,000 | 0,0 |
| 0,951 | -0,288 | -0,254 | 0,034 | 11,7 | 0,000 | 0,0 |

Из рисунка 3 видно, что в случае безударного обтекания приближенное решение, полученное методом наложения, полностью совпадает с точным. При этом приближенное решение методом работы [4] имеет погрешность в окрестностях точки $x = 0,8$ (см. таблицу 3).

6. Обтекание профиля с конечным числом точек отсоса внешнего потока

Метод наложения легко обобщается на случай любого конечного числа точек отсоса внешнего потока. Ниже для определенности возьмем две точки отсоса p и q такие, что $-1 < p < q < 1$. При моделировании тонкого, изолированного, разомкнутого профиля вихревым слоем в случае бесциркуляционного обтекания с отсосом внешнего потока в точках p и q , используя нетрадиционную схему выполнения условия непротекания, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{x - x_0} dx = -f(x_0) - Q_p d(x_0 - p) - Q_q d(x_0 - q) \\ \int_{-1}^1 g(x) dx = 0 \end{cases} \quad (19)$$

в которой константа Q_p характеризует интенсивность отсоса внешнего потока в точке p , а константа Q_q - интенсивность отсоса внешнего потока в точке q . Решение данной системы ищется в классе функций, обращающихся на обоих концах отрезка $[-1; 1]$ в бесконечность и имеющих в точках отсоса p и q особенность вида $w_{pq}(x)$. При данных условиях система (19) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2} f(x_0) dx_0}{x_0 - x} - \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{Q_p}{x-p} - \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{Q_q}{x-q},$$

$x \in (-1; 1)$

Для приближенного решения системы (19) методом наложения искомое решение этой системы представим в виде:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \left[u(x) - \sqrt{1-p^2} \frac{Q_p}{x-p} - \sqrt{1-q^2} \frac{Q_q}{x-q} \right] \quad (20)$$

где $u(x)$ - новая неизвестная функция, $u(x) \in O_h$ и является решением системы уравнений (9). Подставляя найденное из системы (10) значения $u_n(x_k)$ в формулу (20) вместо $u(x)$ получим значения приближенного решения системы (19) в точках x_k . Построенное таким способом приближенное решение системы (19) имеет интерполяционную степень точности.

Аналогично методом наложения строится приближенное решение СИУ в случае циркуляционного обтекания и в случае безударного обтекания профиля с отсосом внешнего потока в нескольких внутренних точках профиля.

Описанный метод приближенного решения системы (19) проиллюстрируем расчетом модельного примера.

Пусть в системе интегральных уравнений (19) $p = -0,8$, $q = 0,8$, $f(x_0) = 0,2$, $Q_p = Q_q = 1$, тогда ее точное решение дается формулой

$$\gamma(x) = -\frac{0,2 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi} \frac{0,6}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{x+0,8} - \frac{1}{\pi} \frac{0,6}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{x-0,8}$$

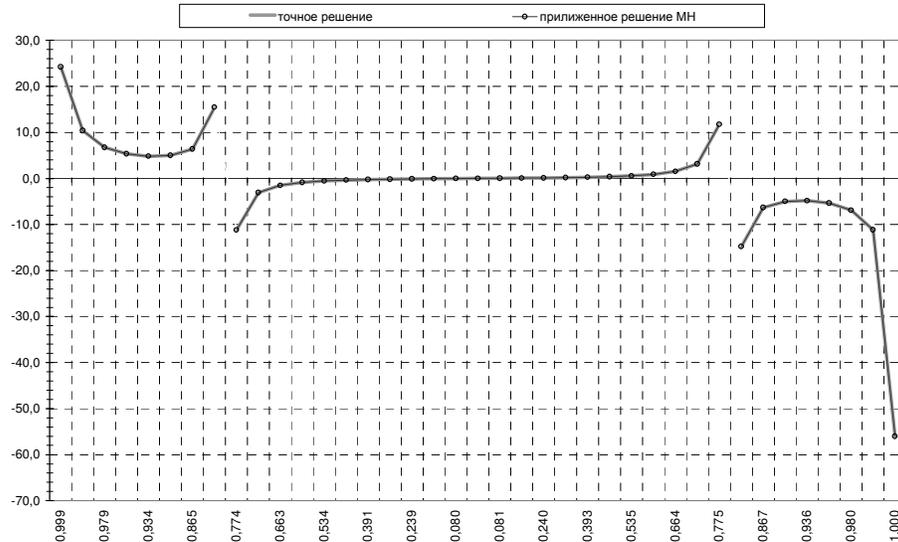


Рис.4 – Графическая интерпретация результатов моделирования процесса безциркуляционного обтекания профиля с двумя точками отсоса внешнего потока

На рисунке 4 численное решение системы (19) методом наложения сравнивается с соответствующим точным решением. Построение численного решения системы (19) методом, изложенным в работе [4] связано со значительными трудностями, вызванными требованием включения всех точек отсоса в множество h_{0n} . С увеличением числа точек отсоса применение метода работы [4] становится невозможным.

Приближенное решение системы (19), полученное методом наложения, полностью совпадает с точным его решением (см. рисунок 4).

7. Заключение

В работе предложен новый метод приближенного решения СИУ, которое рассматривается в классе обобщенных функций и содержит дельта-функцию в своей правой части. Основными достоинствами предложенного метода являются: экономичность и высокая точность результатов расчета. Кроме того построенный в данной работе метод легко обобщается на случай СИУ, содержащего в правой части в качестве аддитивных составляющих любое конечное число k особенностей в виде дельта-функций. В то время, как предложенный в [4] метод численного решения данного СИУ применим только для $k = 1$ и $k = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. // Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях – М.Наука, 1985 г.
2. Матвеев А.Ф., Матвеева А.А. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения аэродинамики с фиксированной гиперсингулярностью. // Дифференциальные уравнения, т.39, №9. – Москва, 2003. – С.1262 - 1271.
3. Матвеев А.Ф., Матвеева А.А. О сингулярном интегральном уравнении с фиксированной гиперсингулярностью. // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ, 2003. - Харьков-Херсон, 2003 - С.176-181.
4. Вайникко Г.М., Лебедева Н.В., Лифанов И.К. Численное решение сингулярного и гиперсингулярного интегральных уравнений на отрезке и дельта-функция. // Математический сборник, т.193, №10 – Москва, 2002 – С.3 – 16.
5. Вайникко Г.М., Лифанов И.К. Моделирование задачи аэродинамики и дифракции волн и расширение интегральных операторов типа Коши на замкнутых и разомкнутых кривых. // Дифференциальные уравнения, т.36, №9. – Москва, 2000. – С.1184 - 1195.
6. Белорозов Р.С., Матвеев А.Ф. Сравнительный анализ методов численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с фиксированной гиперсингулярностью. // Труды XI Международного симпозиума МДОЗМФ, 2007. - Харьков-Херсон, 2007 - С.52-55.