Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 780, 2007, с.71-78

УДК 517.968

Обоснование дискретной математической модели гиперсингулярного интегрального уравнения на системе отрезков

Ю. В. Гандель[1], А. С. Кононенко[1], Т. С. Полянская [2]
[1]*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*
[2]*Национальный технический университет «ХПИ», Украина*

Discrete mathematical model is built and substantiated for the general hypersingular integral equation of the first kind considered on the system of the intervals. This integral equation can be used to study corrugated gyrotron resonators with the different widths and heights.

1. Постановка задачи.

Математическая модель электромагнитного поля в коаксиальном гиротроне для случая ТМ волн была построена на базе гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ) на отрезке [1,2]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(\xi)}{(x-\xi)^2}d\xi+\frac{a}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(\xi)}{x-\xi}d\xi+\frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}F(\theta)\ln|x-\xi|\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q(x,\xi)F(\xi)d\xi=g(x),\ x,\xi\in(-1,1)$$

Вывод этого уравнения проведен с использованием аппарата граничных сумматорных уравнений. Строгое обоснование численного решения такого ГСИУ на отрезке дано в работе [3]. Отметим, что данное уравнение возникло также и в теории проволочных антенн [4].

При исследовании математической модели гиротрона с несколькими резонаторами различной ширины и глубины возникает необходимость численного решения более общего ГСИУ, а именно ГСИУ на системе интервалов:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L}\frac{F(\xi)}{(x-\xi)^2}d\xi+\frac{a}{\pi}\int_{L}\frac{F(\xi)}{x-\xi}d\xi+\frac{b}{\pi}\int_{L}F(\theta)\ln|x-\xi|\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{L}Q(x,\xi)F(\xi)d\xi=g(x),x\in L \qquad (1)$$

относительно неизвестной функции $F(\xi),\ \xi\in L$. Здесь $L=\bigcup_{q=1}^{m}(\alpha_q,\beta_q),\ -\infty<\alpha_1<\beta_1<\ldots<\alpha_m<\beta_m<+\infty$, $g(x)$ принадлежит классу функций на $\overline{L}$, первая производная которых удовлетворяет условию Гельдера с положительным показателем, а функция двух переменных $Q(x,\xi),\ x\in\overline{L},\ \xi\in\overline{L}$ принадлежит тому же классу функций по каждой переменной, равномерно по другой, *a,b* – заданные константы. Первый интеграл в (1) следует понимать в смысле конечной части по Адамару, второй – в смысле главного значения по Коши. Уравнение (1) предполагается однозначно разрешимым.

$F(\xi),\ \xi\in L$ ищется в классе функций, ограничение которых на интервалы (α_i,β_i) : $F_j(\xi)=F(\xi),\ \alpha_j<\xi<\beta_j,\ j=\overline{1,m}$, представимо в виде $F_j(\xi)=v_j(\xi)\sqrt{(\xi-\alpha_j)(\beta_j-\xi)},\ \alpha_j<\xi<\beta_j$, где $v_j(\xi),\ \xi\in[\alpha_j.\beta_j]$ - гладкая функция. Обозначим ограничения функций $g(x)$ и $Q(x,\xi)$:

$$g_i(x)=g(x),\ \alpha_i<x<\beta_i,\ i=\overline{1,m},$$
$$Q_{ij}(x,\xi)=Q(x,\xi),\ \alpha_i<x<\beta_i,\ \alpha_j<\xi<\beta_j,\ i,j=\overline{1,m}$$

Очевидно, уравнение (1) эквивалентно следующей системе СИУ:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{v_i(\xi)}{(x-\xi)^2}\sqrt{(\xi-\alpha_i)(\beta_i-\xi)}\,d\xi+\frac{a}{\pi}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\frac{v_i(\xi)}{x-\xi}\sqrt{(\xi-\alpha_i)(\beta_i-\xi)}\,d\xi+\\&+\frac{b}{\pi}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\ln|x-\xi|\,v_i(\xi)\sqrt{(\xi-\alpha_i)(\beta_i-\xi)}\,d\xi+\\&+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\left[Q_{ij}(x,\xi)+(1-\delta_{ij})\left(\frac{1}{(x-\xi)^2}+\frac{a}{x-\xi}+b\ln|x-\xi|\right)\right]v_j(\xi)\sqrt{(\xi-\alpha_i)(\beta_i-\xi)}d\xi=\\&=g_i(x),\ x\in(\alpha_i,\beta_i),\ i=\overline{1,m}\end{aligned}\qquad(2)$$

Обозначим $\varphi_k(t)=\frac{1}{2}\left[(\beta_k-\alpha_k)t+\alpha_k+\beta_k\right]$ и произведём в полученной системе уравнений замену переменных $-1<t<1,\ -1<t_0<1$:

$$x=\varphi_i(t_0),\ x\in(\alpha_i,\beta_i)$$
$$\xi=\varphi_j(t),\ \xi\in(\alpha_j,\beta_j)$$

Обозначая $u_j(t)=v_j(\varphi_j(t)),\ f_i(t_0)=g_i(\varphi_i(t_0))$, получаем систему ГСИУ на стандартном интервале (-1,1):

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\frac{u_i(t)}{(t_0-t)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt+\frac{a_i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_i(t)}{t_0-t}\sqrt{1-t^2}\,dt+\\
&+\frac{b_i}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t_0-t|\,u_i(t)\sqrt{1-t^2}\,dt+\\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{-1}^{1}K_{ij}(t_0,t)u_i(t)\sqrt{1-t^2}\,dt=f_i(t_0),\ |t_0|<1,\ i=\overline{1,m}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

здесь $a_i=\left(\dfrac{\beta_i-\alpha_i}{2}\right)a,\ b_i=\left(\dfrac{\beta_i-\alpha_i}{2}\right)^2 b$,

$$
K_{ij}(t_0,t)=\begin{cases}
Q_{ii}\left(\varphi_i(t_0),\varphi_i(t)\right)\left(\dfrac{\beta_i-\alpha_i}{2}\right)^2+b_i\ln\left(\dfrac{\beta_i-\alpha_i}{2}\right),(j=i)\\[2ex]
\left[Q_{ij}\left(\varphi_i(t_0),\varphi_j(t)\right)+\dfrac{1}{\left(\varphi_i(t_0)-\varphi_j(t)\right)^2}\right]\left(\dfrac{\beta_j-\alpha_j}{2}\right)^2+\\[2ex]
+\dfrac{a_j(\beta_j-\alpha_j)}{2\left(\varphi_i(t_0)-\varphi_j(t)\right)}+b_j\ln\left|\varphi_i(t_0)-\varphi_j(t),\ j\neq i\right|
\end{cases}
$$

Далее рассматриваем систему (3) относительно неизвестных функций $u_i(t),\ i=\overline{1,m}$. Здесь $f_i(t_0)\in C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$, а $K_{ij}(t_0,t)$ принадлежит тому же классу функций по каждой из переменных равномерно относительно другой, $i,j=\overline{1,m}$, $C^{1,\alpha}_{[-1,1]}$ - класс функций, производная которых удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha>0$.

Как и в [3] введем в рассмотрение операторы:

$$(Au_i)(t_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_i(t)}{(t_0-t)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

$$(\Gamma^{-1}u_i)(t_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_i(t)}{t_0-t}\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

$$(Bu_i)(t_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t_0-t|\,u_i(t)\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

$$(K_{ij}u_j)(t_0)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{ij}(t_0,t)u_j(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Далее пусть $\vec{u}(t)=\{u_i(t)\}_{i=1}^{m}$ - вектор-функция. Обозначим

$$(\overline{A}\vec{u})(t_0) \equiv \left\{(Au_i)(t_0)\right\}_{i=1}^{m},$$
$$(\overline{a}\overline{\Gamma}^{-1}\vec{u})(t_0) \equiv \left\{a_i(\Gamma^{-1}u_i)(t_0)\right\}_{i=1}^{m},$$
$$(\overline{b}\overline{B}\vec{u})(t_0) \equiv \left\{b_i(Bu_i)(t_0)\right\}_{i=1}^{m},$$
$$(\overline{K}\vec{u})(t_0) \equiv \left\{\sum_{j=1}^{m}(K_{ij}u_j)(t_0)\right\}_{i=1}^{m},$$
$$f(t_0) = \left\{f_i(t_0)\right\}_{i=1}^{m}.$$

Пользуясь этими обозначениями, запишем систему (3) в виде операторного уравнения:

$$\overline{A}\vec{u} + \overline{a}\overline{\Gamma}^{-1}\vec{u} + \overline{b}\overline{B}\vec{u} + \overline{K}\vec{u} = \vec{f}, \qquad (4)$$

которое является однозначно разрешимым. Имеют место соотношения [3]:

$$A : U_{n-1}(t) \to nU_{n-1}(t_0)$$
$$\Gamma^{-1} : U_{n-1}(t) \to T_n(t_0)$$

где $T_n(t)$ и $U_{n-1}(t)$ - полиномы Чебышева 1-го рода степени n и 2-го рода степени n-1, соответственно.

Оператор B переводит полиномы степени n-2 в полиномы степени n. Таким образом, оператор $A + a\Gamma^{-1} + bB\vec{u}$ переводит полиномы в полиномы. Обозначим [5]:

Π^{I} - пространство полиномов со скалярным произведением

$$(u,v)^{I} = \int_{-1}^{1} u(t)\overline{v}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{-1}^{1}(u(t)\sqrt{1-t^2})'(\overline{v}(t)\sqrt{1-t^2})'\,dt,$$

Π^{II} - пространство полиномов со скалярным произведением

$$(u,v)^{II} = \int_{-1}^{1} u(t)\overline{v}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Пополняя пространства Π^{I} и Π^{II} по нормам порожденными скалярными произведениями $\|.\|^{I}$ и $\|.\|^{II}$, получаем гильбертовы пространства, которые обозначим H^{I} и H^{II}. Расширения операторов A, Γ^{-1}, B на введенную пару пространств будем обозначать теме же символами. При этом расширение оператора $A : H^{I} \to H^{II}$ непрерывно обратимо в паре (H^{I}, H^{II}) [3].

Введем гильбертовы пространства $\overline{H}^{I}$ и $\overline{H}^{II}$: $\overline{H}^{I}$ - пространство всех вектор-функций $\vec{u}(t) = \left\{u_i(t)\right\}_{i=1}^{m}$, таких, что $u_i(t) \in H^{II}$, $i = \overline{1,m}$ со скалярным произведением $(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{i=1}^{m}(u_i, v_i)^{II}$. Очевидно, в паре пространств $(\overline{H}^{I}, \overline{H}^{II})$ оператор $\overline{A}$ является непрерывно обратимым. Более того, так как оператор A^{-1}

- вполне непрерывен в паре пространств (H^I, H^{II}), то оператор $\overline{A}^{-1}$ - вполне непрерывен в паре пространств $(\overline{H}^I, \overline{H}^{II})$. А отсюда, действуя так же, как и в [5], получаем, что оператор $\overline{A}+\overline{a}\overline{\Gamma}^{-1}+\overline{b}\overline{B}+\overline{K}$ непрерывно обратим в паре пространств $(\overline{H}^I, \overline{H}^{II})$.

2. Дискретизация и регуляризация.

Пусть $\left\{t_j^n\right\}_{j=1}^{n-1}$ - нули полинома Чебышева 2-го рода $U_{n-1}(t)$, т.е. $t_j^n=\cos\dfrac{j}{n}\pi,\ j=\overline{1,n-1}$.

Обозначим $(P_{n-2}u)(t)$ - интерполяционный полином Лагранжа функции $u(t)$ с узлами интерполирования $\left\{t_j^n\right\}_{j=1}^{n-1}$.

Пусть $u_{n-2}(t)$ - многочлен степени n-2. Оператор A переводит $u_{n-2}(t)$ в многочлен степени n-2. Произведем регуляризацию операторов Γ^{-1} и B таким образом, чтобы регуляризованные операторы тоже переводили $u_{n-2}(t)$ в многочлены степени n-2. Для этого также как в [3] положим:

$$(\Gamma_{n-2}^{-1}u_{n-2})(t_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}u_{n-2}(t)\left(\frac{1}{t_0-t}-U_{n-2}(t)T_{n-1}(t_0)\right)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$(B_{n-2}u_{n-2})(t_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\ln|t-t_0|+\frac{2T_{n-1}(t)T_{n-1}(t_0)}{n-1}+\frac{2T_n(t)T_n(t_0)}{n}\right)u_{n-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

В [3] показано, что Γ_{n-2}^{-1} и B_{n-2} и есть искомые операторы.

Обозначим $\overline{\Pi}_{\bar n}^{I}\subset\overline{H}^I$, $\overline{\Pi}_{\bar n}^{II}\subset\overline{H}^{II}$, $\bar n=(n_1,n_2,...,n_m)$ - множества вектор-функций

$\vec{u}_{\bar n}(t)=\left\{u_{in_i-2}(t)\right\}_{i=1}^{m}$, где $u_{in_i-2}=(P_{in_i-2})(t)$, и введем операторы

$$(\overline{\Gamma}_{\bar n}^{-1}\vec{u}_{\bar n})(t_0)=\left\{\left(\Gamma_{n_i-2}^{-1}u_{in_i-2}\right)(t_0)\right\}_{i=1}^{m},$$

$$(\overline{B}_{\bar n}\vec{u}_{\bar n})(t_0)=\left\{\left(B_{n_i-2}u_{in_i-2}\right)(t_0)\right\}_{i=1}^{m},$$

$$(\overline{K}_{\bar n}\vec{u}_{\bar n})(t_0)=\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{ijn_in_j}(t_0,t)\,u_{jn_j-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt\right\}_{i=1}^{m},$$

где $K_{ijn_in_j}(t_0,t)=\left(P_{n_i-2_{t_0}}P_{n_j-2_t}K_{ij}\right)(t_0,t)$. Очевидно, все эти операторы, так же, как и оператор $\overline{A}$, действуют из $\overline{\Pi}_{\bar n}^{I}$ в $\overline{\Pi}_{\bar n}^{II}$.

Приближенное решение $\vec{u}_{\bar{n}}(t)$ уравнения (4) ищем из операторного уравнения

$$\overline{A}\vec{u}_{\bar{n}} + \overline{a}\overline{\Gamma}_{\bar{n}}^{-1}\vec{u}_{\bar{n}} + \overline{b}\overline{B}_{\bar{n}}\vec{u}_{\bar{n}} + \overline{K}_{\bar{n}}\vec{u}_{\bar{n}} = \vec{f}_{\bar{n}}, \tag{5}$$

где $\overrightarrow{f}_{\bar{n}} = \left\{L_{n_i-2}f_i\right\}_{i=1}^{m} \in \overline{\Pi}_{\bar{n}}^{II}$, которое эквивалентно системе ГСИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_{in_i-2}(t)}{(t_0-t)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt + \frac{a_i}{\pi}\int_{-1}^{1}u_{in_i-2}(t)\left(\frac{1}{t_0-t} - 2U_{n_i-2}(t)T_{n_i-1}(t_0)\right)\sqrt{1-t^2}\,dt +$$

$$\frac{b_i}{\pi}\int_{-1}^{1}u_{in_i-2}(t)\left(\ln|t_0-t| + \frac{2T_{n_i-1}(t)T_{n_i-1}(t_0)}{n_i-1} + \frac{2T_{n_i}(t)T_{n_i}(t_0)}{n_i}\right)\sqrt{1-t^2}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{-1}^{1}(P_{n_i-2_{t_0}}P_{n_j-2_t}K_{ij})(t_0,t)u_{jn_j-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \left(L_{n_i-2}f\right)_i(t_0),\ |t_0|<1,\ i=\overline{1,m}$$

Подставляя в i-е уравнение вместо t_0 значения $t_0 \in \left\{t_{r_i}^{n_i}\right\},\ r_i = \overline{1, n_i-1}\ (i=\overline{1,m})$, получаем систему $\sum_{i=1}^{m} n_i - m$ уравнений.

Используя точные квадратурные формулы интерполяционного типа для интегралов [3,5], получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно значений функций $u_{in_i-2}(t)$ в узлах интерполирования:

$$\sum_{k_i=1}^{n_i-1}\alpha_{r_ik_i}^{(1)}u_{in_i-2}(t_{k_i}^{n_i}) + \sum_{k_i=1}^{n_i-1}\alpha_{r_ik_i}^{(2)}u_{in_i-2}(t_{k_i}^{n_i}) + \sum_{k_i=1}^{n_i-1}\alpha_{r_ik_i}^{(3)}u_{in_i-2}(t_{k_i}^{n_i}) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k_i=1}^{n_i-1}\alpha_{r_ik_j}^{(4)}u_{jn_j-2}(t_{k_j}^{n_j})) = \tag{6}$$
$$= f(t_{r_i}^{n_i})\ \ r_i = \overline{1,n_i-1},\ i=\overline{1,m}$$

Здесь

$$\alpha_{r_ik_i}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{\left(1-\left(t_{k_i}^{n_i}\right)^2\right)\left((-1)^{r_i+k_i+1}+1\right)}{n_i(t_{r_i}^{n_i}-t_{k_i}^{n_i})^2}, & k_i \neq r \\ -\dfrac{n_i}{2}, k_i = r_i \end{cases},$$

$$\alpha_{r_ik_i}^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n_i}\left(\dfrac{\left((-1)^{r_i+k_i+1}+1\right)}{t_{r_i}^{n_i}-t_{k_i}^{n_i}} - 2\left(-1\right)^{r_i+k_i+1}t_{r_i}^{n_i}\right)\left(1-\left(t_{k_i}^{n_i}\right)^2\right), k_i \neq r \\ 0, k_i = r_i \end{cases},$$

$$\alpha_{r_ik_i}^{(3)} = \frac{\left(1-\left(t_{k_i}^{n_i}\right)^2\right)}{n_i}\left(\frac{2(-1)^{r_i+k_i}t_{r_i}^{n_i}t_{k_i}^{n_i}}{n_i-1} + \frac{(-1)^{r_i+k}}{n_i} - \ln 2 - 2\sum_{p=1}^{n_i-1}\frac{T_p(t_{k_i}^{n_i})T_p(t_{r_i}^{n_i})}{p}\right),$$

$$\alpha_{r_i k_j}^{(4)} = \frac{1}{n_i} K_{r_i k_j}\left(t_{r_i}^{n_i}, t_{k_j}^{n_j}\right)\left(1-\left(t_{k_j}^{n_j}\right)^2\right).$$

Однозначная разрешимость системы (6) равносильна однозначной разрешимости уравнения (5).

Для доказательства разрешимости уравнения (5) и оценки скорости сходимости приближенного решения к точному нам понадобятся следующие неравенства [3,5]:

$$\left\|\vec{f} - \vec{f}_{\overline{n}}\right\|_{L^{II}} \le \frac{F}{n^{1+\alpha}} \text{ при } n = \min\{n_1, n_2, ..., n_m\} > 3$$

$$\left\|\Gamma_{n_i-2}^{-1} - \Gamma^{-1}\right\|_{\Pi_{n_i-2}^{I} \to L^{II}} \le \frac{c_i^{(1)}}{n_i}$$

$$\left\|B_{n_i-2} - B\right\|_{\Pi_{n_i-2}^{I} \to L^{II}} \le \frac{c_i^{(2)}}{n_i^2}$$

$$\left\|K_{ijn_in_j} - K_{ij}\right\|_{\Pi_{n_j-2}^{I} \to L^{II}} \le \frac{c(K_{ij})}{n_i^{1+\alpha}},\ n_i > 3$$

Имеем

$$\left\|\left(\overline{A} + \overline{a}\overline{\Gamma}_{\overline{n}}^{-1} + \overline{b}\overline{B}_{\overline{n}} + \overline{K}_{\overline{n}}\right)\vec{u}_{\overline{n}} - \left(\overline{A} + \overline{a}\overline{\Gamma}^{-1} + \overline{b}\overline{B} + \overline{K}\right)\vec{u}_{\overline{n}}\right\|_{\overline{L}^{II}} \le$$

$$\le \left\|\left(\frac{c^{(1)}}{n} + \frac{c^{(2)}}{n^2} + \frac{c(K)}{n^{1+\alpha}}\right)\right\| \left\|\vec{u}_{\overline{n}}\right\|_{\overline{L}^{I}} \le \frac{D}{n}\left\|\vec{u}_{\overline{n}}\right\|_{\overline{L}^{I}}$$

где $n = \min\{n_1, ..., n_m\}$

$$c^{(1)} = \max_{1\le i\le m}|a_i| \max_{1\le i\le m}\left|c_i^{(1)}\right|,\ c^{(2)} = \max_{1\le i\le m}|b_i| \max_{1\le i\le m}\left|c_i^{(2)}\right|,$$

$$c(K) = \max_{1\le i,\, j\le m}\left\{c(K_{ij})\right\}$$

Из этих оценок следует, что при всех $\overline{n}$ таких, что

$$n \ge D\left\|\left(\overline{A} + \overline{a}\overline{\Gamma}^{-1} + \overline{b}\overline{B} + \overline{K}\right)^{-1}\right\|_{\overline{L}^{II} \to \overline{L}^{I}}$$

уравнение (5) (а следовательно и система (6)) имеет единственное решение. При $n \to \infty$ имеет место оценка скорости сходимости приближенного решения к точному:

$$\left\|\overline{u}_{\overline{n}} - \overline{u}\right\|_{L^{I}} = \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандель Ю. В., Кононенко А. С. Математическая модель для численного исследования собственных ТМ волн коаксиального гиротрона с гофрированной вставкой // Вісник Харківського університету, серія фізична Ядра, частинки, поля”. - 2005. -№710. - С. 118-122.
2. O. Kononenko, Yu. Gandel “Singular and Hypersingular Integral Equations Techniques for Gyrotron Coaxial Resonators with a Corrugated Insert ”, International Journal of Infrared and Millimeter Waves, Vol. 28, No. 4, pp. 267-274, 2007.
3. Гандель Ю. В., Кононенко А. С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, N9. С. 1256-1262.
4. Лифанов И. К., Ненашев А. С. Сингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, N1. С. 121-137.
5. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учеб. пособие. Ч.II. – Харьков, 1992. – 145 с.