

## Дискретная модель открытой квазиоптической волноведущей системы на базе программного обеспечения МДО

А. А. Носич

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

An E-polarized beam wave guidance and scattering by 2-D quasioptical reflectors is studied, modeling the components of beam waveguides. The incident field is taken as the complex-source-point (CSP) field to simulate a beam generated by a small-horn aperture. A numerical solution is obtained from coupled singular integral equations for the surface currents, discretized by using new Method of Discrete Singularities (MDS) quadrature formulas. The proper software is developed based on the MDS and applied to study the effect of edge illumination on the performance of a chain of confocal elliptic reflectors.

### 1. Введение

Волноводы, сформированные цепью металлических отражателей, представляют собой привлекательную модель проводящей системы миллиметровых волн с малыми потерями [1]-[9]. Здесь эллиптическая форма была определена как способная обеспечивать необходимую коррекцию фазы. Сегодня рефлекторные волноводы используют, например, в Токамаках (устройствах термоядерного синтеза) для нагрева плазмы с помощью миллиметровых волн, сгенерированных высокомошными гиротронами, а также при накачке лазеров оптических квантовых генераторов [10]-[13].

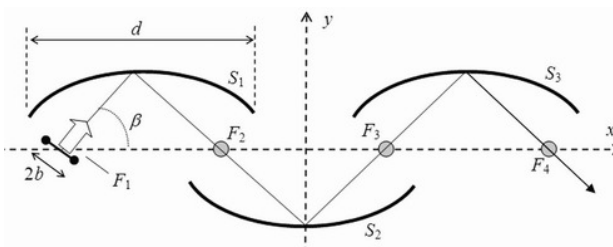


Рис.1 Фрагмент эллиптической волноведущей системы.

Стандартный подход к электромагнитному моделированию отражателей – физическая и геометрическая оптика. Однако, эти методы основаны на трассировке лучей и не способны полностью охарактеризовать эффекты взаимодействия волн и резонансы. Наиболее распространенный сейчас метод конечных разностей во временной области требует огромных затрат мощности вычислительной техники, будучи применённым даже к моделированию одного рефлектора размером более 10 длин волн в открытом пространстве. Для более точного моделирования и анализа квазиоптических отражателей и волноводов нужны более строгие методы.

Основной подход для реализации соответствующих численных алгоритмов – методы интегральных уравнений. Ключевым моментом здесь является разработка эффективной дискретной модели, т.е. быстрого и сходящегося численного алгоритма с контролируемой точностью.

В этой статье предлагается один из таких подходов, основанных на методе дискретных особенностей (МДО) [14-16], с помощью которого описывается модель открытого квазиоптического волновода, состоящего из фрагментов софокусных эллипсов [17].

## 2. Постановка задачи и СИУ

Рассматривается двумерная модель зеркальной антенны, состоящей из рефлектора и апертурного облучателя. Будем считать, что рефлектор имеет вид идеально проводящего бесконечно тонкого цилиндрического экрана, образующие которого параллельны оси  $z$ . Облучатель имеет апертуру в виде прямолинейного отрезка, параллельного этой оси. Геометрия поперечного сечения цилиндрического рефлектора  $S$  (для краткости обозначений, будем рассматривать одиночный рефлектор  $S = S_1$ ) и облучателя показана на рис.1. Будем считать, что  $S = \{(x, y) \in R^2 : x = F(y), y_1 < y < y_2\}$  - простая гладкая кривая.

Изучается дифракция монохроматической  $E$ -поляризованной волны (зависимость от времени дается множителем  $e^{-i\omega t}$ ) на рефлекторе. Единственную отличную от нуля составляющую электрического поля обозначим  $E_z \equiv U(x, y)$ .

Полное поле в присутствии рефлектора описывается суммой  $U^{полн} = U + U_0$ , где  $U$  – искомое поле, рассеянное рефлектором, а  $U_0$  – заданное падающее поле. Искомая функция  $U$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2)U(x, y) = 0, \quad (x, y) \in R^2 \setminus \bar{S}, \quad (1)$$

(здесь  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ,  $c$  - скорость света и  $\lambda$  - длина волны) с граничным условием Дирихле [14]:

$$U(x, y)|_S = -U_0(x, y)|_S, \quad (x, y) \in S. \quad (2)$$

Кроме того, функция  $U$  удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial r} - ikU(x, y) = \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r = |x, y| \rightarrow \infty \quad (3)$$

и условию Майкснера в интегральной форме:

$$\int_{\Omega} \{k^2 |U|^2 + |\nabla U|^2\} d\sigma < \infty, \quad (4)$$

где  $\Omega$  - любая ограниченная область в  $R^2$ . Поставленная краевая задача (1)-(4) имеет единственное решение [14].

Представим рассеянное поле вне одиночного рефлектора в виде потенциала простого слоя:

$$U(\vec{r}_0) = \frac{i}{4} \int_S H_0^{(1)}(k|\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)|) j(s) ds, \quad s, s_0 \in S \quad (5)$$

Здесь  $H_0^{(1)}(z)$  - функция Ханкеля I-го рода нулевого порядка,  $j(s)$  - неизвестная функция плотности тока на ребре.

Теория потенциала простого слоя сводит задачу (1)-(4) к интегральному уравнению (ИУ) первого рода относительно функции  $j(s)$ :

$$\frac{i}{4} \int_S H_0^{(1)}(k|\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)|) j(s) ds = -U_0(\vec{r}(s_0)), \quad s, s_0 \in S \quad (6)$$

В общем случае, интегральная модель волновода с  $Q$  отражателями будет выглядеть как система  $Q$  спаренных ИУ:

$$\frac{i}{4} \sum_{q=1}^Q \int_{S_q} H_0^{(1)}(k|\vec{r}_q(s) - \vec{r}_p(s_0)|) j_q(s) ds = -U_0(\vec{r}_p(s_0)) \Big|_{S_p} \quad p=1, \dots, Q \quad (7)$$

После новой параметризации контура  $S$ , с помощью уравнений  $x(t), y(t)$ , где  $|t| \leq 1$ , а также с учетом сингулярного поведения плотности тока на ребре бесконечно тонкого, идеально проводящего экрана, которое является следствием условия Майкснера (4), можем записать  $j(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ , где  $v(t)$  - новая гладкая функция, подлежащая определению, и следующее сингулярное интегральное уравнение (СИУ) с логарифмическим ядром для  $v(t)$ :

$$\int_{-1}^1 H_0^{(1)}(kR(t, t_0)) v(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -U_0(t_0), \quad (8)$$

где  $R(t, t_0) = \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}$ .

Прямая дискретизация интегрального уравнения первого рода (8), неэффективна, и его численное решение, вообще говоря, неустойчиво. Поэтому, для отыскания устойчивого численного решения (8), перейдем от этого уравнения к СИУ с ядром Коши и дополнительным условием.

Переход осуществляется путем дифференцирования уравнения (5) по  $t_0$ , с учетом известного соотношения  $(H_0^{(1)}(z))' = -H_1^{(1)}(z)$ . Дополнительное условие

находим интегрированием (8) по  $t_0$  с весом  $(1-t_0^2)^{-1/2}$  на отрезке  $[-1, 1]$  (см. [14, 16]). В результате получаем

$$\int_{-1}^1 \frac{v(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{-1}^1 K(t, t_0) v(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f(t_0), \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 M(t) v(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = c, \quad (10)$$

где  $f(t_0) = (-U_0(t_0))'$ ,  $M(t)$  и  $K(t, t_0)$  - гладкие функции,  $|t_0| \leq 1, |t| \leq 1$  а  $c = -\int_{-1}^1 U_0(t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}$  - константа.

### 3. Дискретная математическая модель

Для дискретизации СИУ (9) с дополнительным условием (10) используем квадратурные формулы интерполяционного типа с чебышевскими узлами для несобственных и сингулярных интегралов [14]:

$$t_i^n = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i=1, 2, \dots, n - \text{нули полиномов Чебышева I рода;}$$

$$t_{0j}^n = \cos \frac{j}{n} \pi, \quad j=1, 2, \dots, n-1 - \text{нули полиномов Чебышева II рода.}$$

Сформулируем задачу для приближенного решения  $v_n(t)$ , которое ищем в виде интерполяционного полинома степени  $n-1$ :

$$v_n(t) = \sum_{q=1}^n v_n(t_q^n) \frac{T_n(t)}{n U_{n-1}(t_q^n) \cdot (t-t_q^n)},$$

удовлетворяющего СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_n(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{n,0n}(t, t_0) v_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi} f_{0n}(t_0) \quad (11)$$

и дополнительному условию

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M_n(t) v_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\pi} c, \quad (12)$$

где  $K_{n,0n}(t, t_0)$  - интерполяционный полином функции  $K(t, t_0)$  по  $t$  и по  $t_0$  с узлами в  $t_i^n$  и  $t_{0j}^n$ , соответственно;  $M_n(t)$  - интерполяционный полином  $M(t)$  с узлами в  $t_i^n$ ;  $f_{0n}(t_0)$  - интерполяционный полином  $f(t_0)$  с узлами в  $t_{0j}^n$ . Таким образом,  $K_{n,0n}(t_i^n, t_{0j}^n) \equiv K(t_i^n, t_{0j}^n)$ ,  $M_n(t_i^n) = M(t_i^n)$  и  $f_{0n}(t_{0j}^n) \equiv f(t_{0j}^n)$ .

Для приближенного решения СИУ (9) с дополнительным условием (10) получаем систему  $n$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $v_n(t)$  в узлах интерполяции, эквивалентную задаче (11),(12):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{v_n(t_i^n)}{t_i^n - t_{0j}^n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(t_i^n, t_{0j}^n) v_n(t_i^n) = \frac{1}{\pi} f(t_{0j}^n), \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (11)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(t_i^n) v_n(t_i^n) = \frac{1}{\pi} c, \quad (j=n) \quad (12)$$

В случае произвольного количества отражателей  $Q$ , эта СЛАУ примет вид:

$$\frac{1}{n} \sum_{q=1}^Q \left[ \sum_{i=1}^n \frac{v_q(t_i^n)}{t_i^n - t_{0j}^n} + \sum_{i=1}^n K_{pq}(t_i^n, t_{0j}^n) v_q(t_i^n) \right] = f_p(t_{0j}^n), \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (13)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{q=1}^Q \left[ \sum_{i=1}^n M_{pq}(t_i^n) v_q(t_i^n) \right] = c_p, \quad p=1, 2, \dots, Q \quad (14)$$

Как показано в [14], эта СЛАУ однозначно разрешима при достаточно больших  $n$ . Там же имеется оценка скорости сходимости полученного приближенного решения  $v_n(t)$  к точному решению задачи (9), (10) при  $n \rightarrow \infty$ . Погрешность квадратурных формул была проанализирована и сопоставлена с погрешностью других методов в [16]. Результаты показывают, что погрешность быстро убывает с ростом  $n$ , и для поддержания точности вычислений на машинном уровне ( $10^{-6}$ ), параметр дискретизации  $n$  должен быть как минимум  $7*d$  (где  $d$  – размер апертуры антенны в длинах волн).

#### 4. Модель волнового пучка

Поскольку нашей целью является построение дискретной математической модели зеркальной антенны, то адекватный выбор падающего поля является важным элементом такой модели. В качестве падающего поля мы будем использовать поле т.н. комплексного источника (КИ). Под КИ следует понимать нить с током, расположенную в точке с комплексными координатами  $(x_c, y_c)$ , координаты проекции которой на вещественное пространство есть  $(x_0, y_0)$ . Напряженность электрического поля, создаваемого таким источником, имеет единственную отличную от нуля  $\zeta$ -составляющую:  $U_0(\vec{r}) = H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}_c|)$ , где  $|\vec{r} - \vec{r}_c| = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$ . Функция  $U_0(\vec{r})$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца, а комплексный радиус-вектор КИ определяется так:  $\vec{r}_c = (x_c, y_c) = \vec{r}_0 + i\vec{b}$ , где  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ ,  $\vec{b} = (b \cos \beta, b \sin \beta)$ . С помощью введенной ранее параметризации правую часть СИУ (8) теперь можно записать так:

$$U_0(t_0) = H_0^{(1)} \left( k \sqrt{(x(t_0) - x_c)^2 + (y(t_0) - y_c)^2} \right) \quad (15)$$

Функция  $U_0(\vec{r}_0)$  имеет на вещественной плоскости две точки ветвления:  $(x_0 \pm b \cos \beta, y_0 \mp b \sin \beta)$ , и удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Чтобы выделить однозначную ветвь  $U_0(\vec{r})$ , соединим эти две точки разрезом длины  $2b$  и будем полагать, что разрез не пересекает контур  $S$  (рис.1). Такой разрез может рассматриваться как модель апертуры рупорного облучателя, причем параметры  $2b$ ,  $\beta$  и  $(x_0, y_0)$  характеризуют ширину, угол ориентации и положение центра апертуры рупорной антенны, поле которой моделируется полем КИ.

Поле КИ сохраняет направленный характер как в ближней зоне, так и в дальней. При этом вблизи оси излучения на небольшом расстоянии от апертуры функция (15) близка к гауссовому пучку волн, а вне этой области переходит в цилиндрическую волну. Ширина пучка с увеличением  $kb$  уменьшается.

### 5. Вычислительный эксперимент №1: построение и анализ дискретной модели эллиптического фокусирующего зеркала

Рассмотрим модель одиночного эллиптического рефлектора с контуром  $S = \{(x, y) \in R^2 : (x/a_1)^2 + (y/a_2)^2 = 1, y_1 < y < y_2\}$ , где  $a_1$  - большая, и  $a_2$  - меньшая полуось (рис. 2). Источник по находится в одном из двух ГО фокусов эллипса. На практике такая геометрия интересна в некоторых приложениях, где необходимо обеспечить фокусировку электромагнитного поля в ближней зоне.

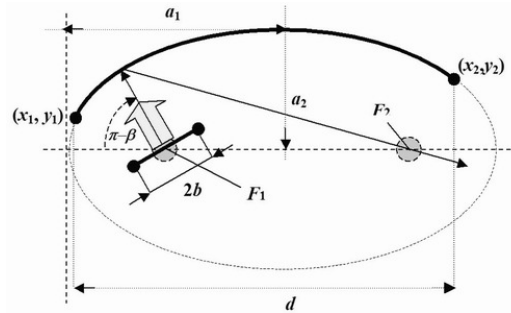


Рис.2 Геометрия одиночного эллиптического отражателя с источником в первом ГО фокусе ( $F_1$ )

Численно было проверено, как ведет себя амплитуда поля во втором фокусе  $F_2$ , куда фокусируется пучок, и как она зависит от параметра освещенности краёв (от англ. Edge illumination, отношение амплитуды падающего поля на крае, к амплитуде падающего поля в центре рефлектора:  $IE = 20 \log(U_0^{кр}/U_0^{центр})$ ). Анализ показывает (рис.3), что освещенность обоих краёв должна быть как минимум -10 дБ для того, чтобы обеспечивать амплитуду поля в фокусе  $F_2$  хотя бы 0.8 от значения амплитуды КИ в фокусе  $F_1$ .

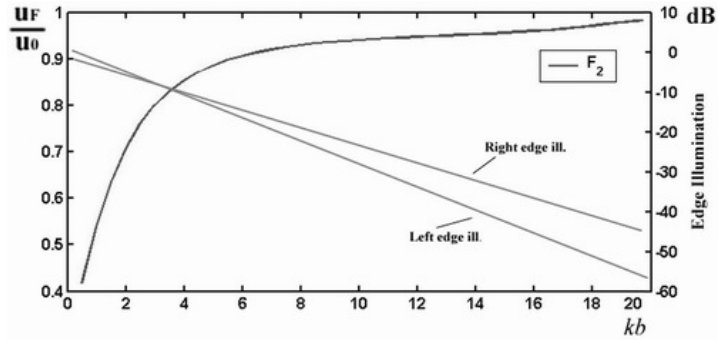


Рис.3 Амплитуда поля в фокусе  $F_2$ , нормированная на амплитуду источника как функция от  $kb$ , для одиночного эллиптического фокусирующего зеркала с  $d=20\lambda$  и  $\beta=60^\circ$ .

Рис.4 показывает, как отраженные лучи фокусируются во втором фокусе ( $F_2$ ) полу-эллиптических рефлекторов разного размера.

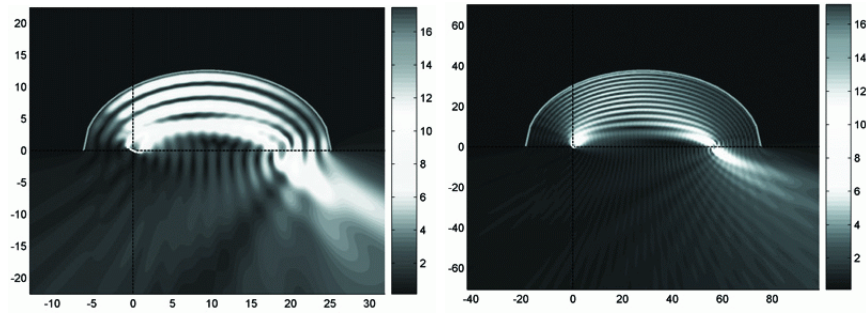


Рис.4. Ближние поля полу-эллипсов с  $d=10\lambda$  (левый) и  $d=30\lambda$  (правый),  $kb=2$

Следующий пример (рис.5) иллюстрируют фокусировку лучей, отраженных от произвольных фрагментов эллиптического зеркала. В каждом случае фокусировка видна четко; можно также заметить, что для малых зеркал фокус иногда получается "размазанным".

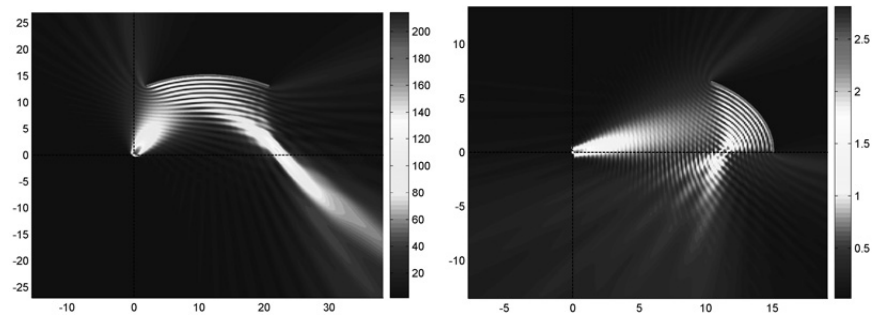


Рис.5 Ближние поля произвольных частей эллипса с  $d=12\lambda$ ,  $kb=5$  (левый), и  $d=15\lambda$ ,  $kb=10$  (правый).

### 6. Вычислительный эксперимент №2: построение и анализ дискретной модели эллиптической волноведущей системы

Рассмотрим фрагмент открытого волновода, состоящего из трёх идентичных зеркал – софокусных фрагментов эллипса (рис.1). Источник стоит в первом ГО фокусе ( $F_1$ ) рефлектора  $S_1$ , и освещает середину  $S_1$ . Такая структура может рассматриваться как модель реального волновода для передачи высокоомощных миллиметровых волн на большие расстояния в свободном пространстве с минимальными потерями. В этом случае, моделирование производится тремя спаренными СИУ (7), в итоге чего мы получаем матричное уравнение такого же типа и с такими же свойствами, как и уравнение для одной антенны.

Как и в случае с одиночным эллипсом (рис.3), была проанализирована зависимость амплитуды поля в трёх последующих фокусах ( $F_2, F_3, F_4$ ) как функция от  $kb$  (рис.6), а так же как функция от угла ориентации КИ  $\beta$  (рис.7), в то время как сам КИ находился в фокусе  $F_1$ . Результаты показали, что для того, чтобы обеспечить 0.9 от амплитуды источника в последующих фокусах, необходима освещенность краёв, равная -15 дБ. Это может быть объяснено большей дифракцией на краях всех трёх эллипсов, чем в случае с одиночным отражателем.

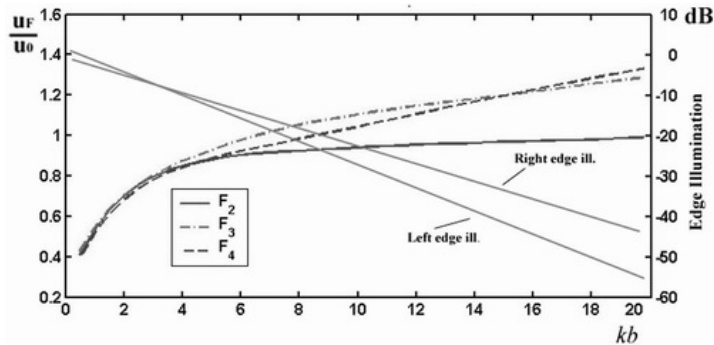


Рис.6 Амплитуды поля в фокусах  $F_2, F_3, F_4$ , нормированные на амплитуду источника как функции от  $kb$ , для трёх эллиптических фокусирующих зеркал с  $d_{1,2,3}=20\lambda$ ,  $a_2/a_1=0.8$ ,  $\beta=60^\circ$ .

Амплитуды поля в последующих фокусах ничтожно малы (рис.7) когда КИ недостаточно освещает первый отражатель. (т.е. когда  $\beta > 150^\circ$  и  $\beta < 320^\circ$ ). Напротив, они достигают максимального значения когда КИ направлен на центр первого эллипса ( $50^\circ < \beta < 60^\circ$ ) и оба края освещены на уровне -12 дБ.



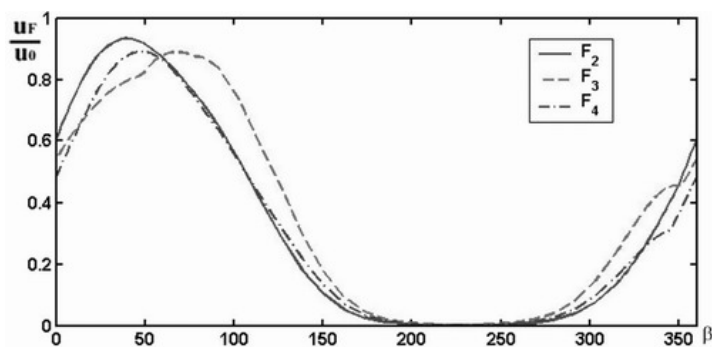


Рис.7 Амплитуды поля в фокусах  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ , нормированные на амплитуду источника как функции от угла ориентации КИ, для трёх эллиптических фокусирующих зеркал с  $d_{1,2,3}=20\lambda$ ,  $a_2/a_1=0.8$ ,  $kb=4$ .

На рис.8 показано ближнее поле модели открытого квазиоптического волновода, состоящего из 8 идентичных софокусных фрагментов эллипсов, каждый размером по  $25\lambda$ . Иллюстрация чётко показывает волноведущие свойства данной системы, практически без потерь и нежелательной дифракции. Расчёт этой иллюстрации занял 20 минут на ПК с 1Гб оперативной памяти и 2.6ГГц двухядерным процессором. В данном случае, поле состояло из  $400 \times 400$  точек для матрицы дискретной модели размером  $1680 \times 1680$  элементов.

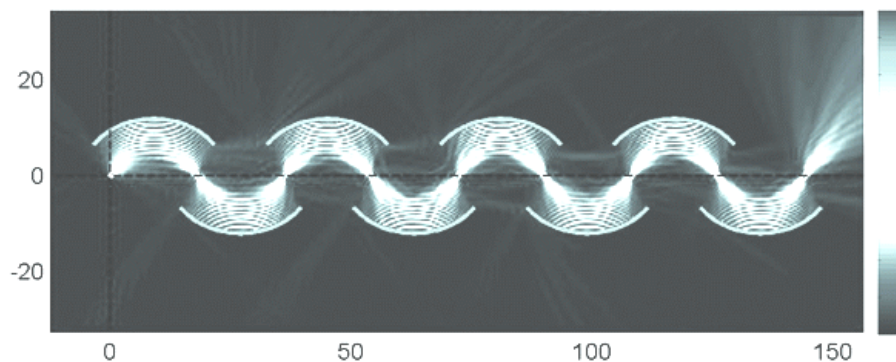


Рис.8 Ближнее поле открытого квазиоптического волновода, состоящего из 8 идентичных софокусных фрагментов эллипсов, каждый размером по  $25\lambda$ ,  $a_2/a_1=0.8$ ,  $kb=4$ ,  $\beta=60^\circ$ .

## 7. Выводы

Был разработан точный и эффективный численный алгоритм двумерного анализа многорефлекторных открытых квазиоптических волноведущих систем. Главным преимуществом представленного численного метода, основанного на сведении рассмотренной задачи к СИУ и ее последующем решении МДО, является то, что он позволяет строить численные модели квазиоптических

рефлекторных антенн и волноводов произвольной формы практически за минуты, с заданной точностью. Для современной общедоступной вычислительной техники - настольных персональных компьютеров - время просчета ближнего поля для одиночного рефлектора с апертурой, например, в 100 длин волн составляет всего 3-5 минут и может быть значительно уменьшено, если использовать мощные многопроцессорные платформы. Таким образом, электромагнитные характеристики рефлекторных антенн можно контролировать и исследовать путем построения ближних полей, графиков диаграмм направленности, коэффициентов направленного действия и т.д., для множества параметров геометрии и источника.

Аналогичный метод разработан и для случая Н-поляризации. Далее, МДО может быть модифицирован на случай трехмерных антенн, по крайней мере, осесимметричных. Кроме того, МДО можно применить и для моделирования неидеальных рефлекторов - импедансных, диэлектрических и резистивных. Благодаря удачному сочетанию высокой эффективности и контролируемой точности, метод может быть использован как базовый в программах компьютерной оптимизации, основанной на градиентном поиске или же на генетических алгоритмах.

В данной работе, при помощи программного обеспечения, построенного на базе МДО, были исследованы зависимости амплитуд во второстепенных фокусах одиночных эллиптических фокусирующих зеркал, и софокусных эллипсов, составляющих волноведущую систему, от различных параметров. Анализ показал, что волноведущие свойства такой системы строго зависят от положения и ориентации источника, а так же от освещенности краёв первого рефлектора.

Автор выражает благодарность Ю.В. Ганделю за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. B. Felsen, Quasi-optic diffraction, in Proc. Symp. Quasi-Optics, NY: P. I. Brooklyn, pp. 1-40, 1964.
2. B. Z. Katsenelenbaum, "Millimeter wave transmission using reflections from the chain of focusing reflectors", Radiotekhnika i Elektronika, vol. 8, no. 9, pp. 1516-1522, 1963 (in Russian; translated in Radio Eng. & Electronic Physics).
3. J. E. Degenford, M.D. Sirkis, W.H. Steier, The reflecting beam waveguide, IEEE Trans. Microwave Theory & Techn., vol. 12, no. 4, pp. 445-453, 1964.
4. B.Z. Katsenelenbaum, "Quasioptical methods of shaping and transmission of mm waves", Uspekhi Fizicheskikh Nauk, vol. 83, no 1, pp. 81-105, 1964 (translated in Sov.Physics - Uspekhi).
5. R. B. Vaganov, A. B. Dogadkin, B. Z. Katsenelenbaum, "Periscope reflector transmission line", Radiotekhnika i Elektronika, vol. 10, no 9, pp. 1672-1675, 1965 (in Russian; translated in Radio Eng. & Electronic Physics).
6. V. S. Averbakh, et al, "Experimental study of reflector beam waveguide", Radiotekhnika i Elektronika, vol. 11, no. 4, pp. 750-752, 1966 (translated in Radio Eng. & Electronic Physics).

7. R. Tremblay and A. Boivin, "Concepts and techniques of microwave optics", *Appl. Opt.*, vol. 5, no. 2, pp. 249-278, 1966.
8. G. Goubau, P.D. Coleman, "Beam waveguides", in E.C. Okress (Ed.), *Microwave Power Engineering*, NY, Academic Press, 1968, vol. 1, pp. 228-255.
9. P.F. Goldsmith, *Quasioptical Systems: Gaussian Beam, Quasioptical Propagation and Applications*. New York, IEEE Press, 1998.
10. Fernandez, et al., Quasioptical transmission lines for ECRH at TJ-II stellarator, *Int. J. Infrared & Mm Waves*, vol. 21, no 12, pp. 1945-1957, 2000.
11. M. K. Thumm, W. Kasperek, Passive high-power microwave components, *IEEE Trans. Plasma Science*, vol. 30, no 3, pp. 755-786, 2002.
12. P.F. Goldsmith, "A quasioptical feed system for radio-astronomical observations at mm wavelength", *Bell Sys. Tech. J.*, vol. 56, pp. 1483-1501, 1977.
13. L. Empacher, W. Kasperek, "Analysis of a multiple-beam waveguide for free-space transmission of microwaves", *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, vol. 49, no 3, pp. 483-493, 2001.
14. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн, учебное пособие.-Харьков: Ротапринт ХГУ, 1992.-145с.
15. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.-Харьков: ХНУ, 2001.-92 с.
16. A.A. Nosich, Y.V. Gandel, Numerical analysis of quasioptical multi-reflector antennas in 2-D with the method of discrete singularities: E-wave case, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 2007, vol. 55, no 2, pp. 399-406.
17. A.A. Nosich, Y.V. Gandel, T. Magath, A. Altintas, Numerical Analysis and Synthesis of 2-D Quasioptical Reflectors and Beam Waveguides Based on an Integral-Equation Approach with Nystrom's Discretization, *JOSA-A*, 2007, Vol. 24, Issue 9, pp. 2831-2836.