Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 780, 2007, с.186-192

УДК 532.546

Математическое моделирование продвижения двумерной границы разноцветных жидкостей в неоднородно-анизотропном грунте†

Д. Е. Шестерин
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Россия

The problem task of evolution of border of "multi-colored" liquids in a non-uniform anisotropic ground in presence of pool of a free liquid is formulated. Problems about work of a source of pollution near to pool of a free liquid with border as a circle in grounds which permeability is modeled by laws $\rho = q^2$ and $\rho = sh^2 q$.

Большое количество задач практики связано с движением жидкостей или газов в пористых средах, свойства которых могут быть в каждой точке одинаковы по всем направлениям (изотропные грунты) либо зависеть от выбора направления (анизотропные грунты).

На практике часто встречаются задачи, связанные с работой источника загрязнения в грунтах вблизи бассейна свободной жидкости. Важно знать зависимость времени, которое бассейн остается незагрязненным после начала работы источника загрязнения от характеристик грунта. Такие задачи в неоднородных изотропных грунтах исследованы достаточно подробно. Но зачастую пласты, в которых происходит фильтрация, не являются изотропными (трещиновато-пористые, слоистые), а точных решений задач в анизотропно-неоднородном грунте для случаев, когда граница бассейна не совпадают с координатными линиями в главной плоскости направлений анизотропии не известно**.**

Таким образом, актуальна задача развития математических моделей и методов численного исследования для фильтрационных течений в анизотропно-неоднородном грунте, содержащем источники загрязнения вблизи бассейна свободной жидкости. Цель работы – построение математической модели указанного процесса, допускающей анизотрапию, при определенных условиях.

1.Фильтрацию несжимаемой жидкости вязкости μ и плотности ρ в недеформируемом анизотропном грунте описывают обобщенный закон Дарси [1]:

$$\vec{v} = K \cdot \nabla\varphi \quad \left(\varphi = -\frac{p + \rho\Pi}{\mu}\right) \tag{1.1}$$

и уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1.2}$$

† *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №06-01-96303)*

где ∇ - оператор Гамильтона, φ - обобщенный потенциал, $\vec{v}$ - скорость фильтрации, p - давление, $K=(K_{ij})$, $i,j=1..3$ - тензор второго ранга, характеризующий свойства среды, Π - потенциал массовых сил. Уравнения (1.1), (1.2) записаны в безразмерных величинах. Уравнения (1.1), (1.2) описывают также нестационарную фильтрацию, время t входит в них в этом случае как параметр.

Пусть течение происходит в тонком пласте грунта толщины H с плоским основанием, где выберем декартову систему координат $\xi O\eta$. Обобщенный потенциал φ удовлетворяет уравнению [4]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[H\left(K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[H\left(K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\right]=0, \qquad (1.3)$$

где (ξ,η) - координаты точки в основании слоя. Перейдем в плоскости (ξ,η) к главным направлениям анизотропии p и q. Уравнение (1.3) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[H\left(K_p\frac{\partial\varphi}{\sqrt{E}\partial p}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial q}\left[H\left(K_q\frac{\partial\varphi}{\sqrt{G}\partial q}\right)\right]=0, \qquad (1.4)$$

где E и G - коэффициенты Ламэ, связанные с квадратом элемента дуги формулами [5]:

$$E=\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2}, \quad G=\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2}, \quad dS^2=Edp^2+Gdq^2. \qquad (1.5)$$

Запишем уравнение (1.4) в каноническом виде. Для этого воспользуемся, согласно [5], заменой переменных p,q на x,y, которые связаны уравнениями Бельтрами:

$$\sqrt{\frac{K_pG}{K_qE}}\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{\partial y}{\partial q}, \quad \sqrt{\frac{K_qE}{K_pG}}\frac{\partial x}{\partial q}=-\frac{\partial y}{\partial p}. \qquad (1.6)$$

Выбирая одно из решений уравнений (1.6) в качестве новых координат запишем уравнение (1.5) в виде

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)=0, \; P=H\sqrt{K_pK_q}. \qquad (1.7)$$

2. Будем рассматривать частный случай фильтрации в слоях, удовлетворяющих следующим условиям: сеть координат (p,q) изотермическая ($\sqrt{E}=\sqrt{G}=C$, $dS^2=C^2(p,q)(dp^2+dq^2)$), слой имеет постоянную толщину $H=1$, коэффициенты K_p и K_q, характеризующие свойства среды вдоль главных направлений анизотропии могут быть записаны в виде:

$$K_p=\rho(p,q)k_p, \; K_q=\rho(p,q)k_q, \qquad (2.1)$$

где $\rho(p,q)>0$ хотя бы один раз дифференцируемая функция, k_p, k_q - постоянные. В этом случае решение уравнений Бельтрами (1.6) имеет вид:

$$x = \sqrt{\frac{k_q}{k_p}}\,p\,,\ \ y = q\,. \tag{2.2}$$

Используя (2.2) перепишем (1.5) в виде[5]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\rho}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{\rho}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = 0\,, \tag{2.3}$$

где $\tilde{\rho}(x, y) = \rho\left(\sqrt{\frac{k_p}{k_q}}x, y\right)$ это функция $\rho = \rho(p, q)$ переписанная в координатах x, y.

3. Пусть в неограниченной области фильтрации D располагается ограниченная кривой Γ область, заполненная свободной жидкостью. Тогда на границе Γ выполняется условие [3]

$$\varphi^{+}(M) = 0\,,\ M = (p, q) \in \Gamma\,, \tag{3.1}$$

здесь «+» означает предельное значение функции при подходе к границе со стороны нормали. Если в область фильтрации D ограничена сингулярной линией σ , на которой проводимость K обращается в ноль, то на этой линии выполняются условия[4],[5]:

$$\left[K_n(M)\frac{\partial \varphi(M)}{\partial \nu}\right]^{+} = 0\,,\ M = (p, q) \in \sigma\,, \tag{3.2}$$

где

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{n} \cdot K}{\left|\vec{n} \cdot K\right|}\,,\ K = (K_{ij})\,.$$

Потребуем также выполнения для обобщенного потенциала φ условий в бесконечности

$$\varphi(M) = \mathrm{O}\left(r_{MM_0}^{-1}\right),\ \left|\sqrt{K_p K_q} \cdot \nabla \varphi(M)\right| = \mathrm{O}\left(r_{MM_0}^{-2}\right),\ r_{MM_0} \to \infty\,. \tag{3.3}$$

Перепишем граничные условия (3.1)-(3.3) в координатах (x, y)

$$\Phi^{+}(M) = 0\,,\ M = (x, y) \in \Gamma'\,, \tag{3.1'}$$

$$\left[\tilde{\rho}\,\frac{\partial \Phi(M)}{\partial n}\right]^{+} = 0 \quad,\ M = (x, y) \in \sigma'\,, \tag{3.2'}$$

$$\Phi(M) = \mathrm{O}\left(r_{M'M'_0}^{-1}\right),\ \left|\tilde{\rho} \cdot \nabla \Phi(M)\right| = \mathrm{O}\left(r_{M'M'_0}^{-2}\right),\ r_{M'M'_0} \to \infty\,. \tag{3.3'}$$

Как видно, по форме условия (3.1’), (3.2’), (3.3’) не меняются, но (3.1) и (3.2) записываются уже на новых границах Γ' и σ'_{01}, которые представляют собой границы Γ и σ_{01} преобразованные с помощью выражений (2.2).

4. Продвижение границы раздела «разноцветных» жидкостей описывает уравнение, записанное в безразмерных величинах

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{4.1}$$

Положение подвижной границы раздела разноцветных жидкостей Γ_t задаем параметрически

$$p = p(t,S),\ q = q(t,S), \tag{4.2}$$

где S - параметр. В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t полагаем известным

$$p_0 = p(0,S),\ q_0 = q(0,S). \tag{4.3}$$

Дифференциальные уравнения движения границы Γ_t имеют вид [5]:

$$\frac{dp}{dt} = K_p \frac{\partial\varphi}{\partial p},\ \frac{dq}{dt} = K_q \frac{\partial\varphi}{\partial q}. \tag{4.4}$$

Таким образом, задача эволюции границы «разноцветных» жидкостей состоит в следующем: по заданным в области фильтрации источникам и стокам течения, характеристикам грунта, форме границ Γ и σ, известной форме подвижной границы раздела «разноцветных» жидкостей в начальный момент времени Γ_0 требуется определить положение границы Γ_t в последующие моменты времени $t > 0$. Для этого необходимо найти обобщенный потенциал φ, удовлетворяющий основному уравнению (2.3), граничным условиям (3.1), (3.2), условиям в бесконечности (3.3) и интегрировать дифференциальные уравнения движения границы Γ_t (4.4) при начальных условиях (4.3).

5. Искать решение задачи будем в виде

$$\Phi(M) = \Phi_0(M) + \Phi_*(M),\ M = (x,y), \tag{5.1}$$

где $\Phi_0(M)$ - обобщенный потенциал, описывающий течение в области фильтрации в отсутствии границы Γ' и удовлетворяющий условиям (3.2’) на сингулярной линии σ', $\Phi_*(M)$ - потенциал возмущения. Перепишем условие (3.1’) для потенциала возмущения:

$$\Phi_*(M) = -\Phi_0(M), \qquad M = (x,y) \in \Gamma'. \tag{5.2}$$

Потенциал возмущений $\Phi_*(M)$ ищем в виде потенциала двойного слоя [2]

$$\Phi_*(M) = \int_{\Gamma'} g(N)\tilde{\rho}(N)\frac{\partial F_1(M,N)}{\partial n_N} dl_N, \quad N = (x,y) \in \Gamma', \tag{5.3}$$

где $F_1(M,N)$ - первое фундаментальное решение уравнения (2.3), вид которого зависит от вида $K(N)$, удовлетворяющее условиям (3.2’) на границе σ' и условиям в бесконечности (3.3’); $\vec{n}$ - орт нормали к границе Γ в точке M.
Предельное значение потенциала возмущений $\Phi_*(M)$ имеет вид [2]

$$\Phi_*^+(M) = \int_{\Gamma} g(N)\tilde{\rho}(N)\frac{\partial F_1(M,N)}{\partial n_N} dl_N + \frac{g(M)}{2}, \quad M = (x,y) \in \Gamma'. \tag{5.4}$$

Учитывая (5.3) и (5.4), из условия (5.2) имеем для $g(N)$ неоднородное интегральное уравнения типа Фредгольма:

$$g(M)-2\int_{\Gamma'} g(N)\tilde{\rho}(N)\frac{\partial F_1(M,N)}{\partial n_N}dl_N=2\Phi_0(M),\quad M=(x,y)\in\Gamma'. \qquad (5.5)$$

Решая уравнение (5.5) относительно $g(M)$ найдем по формулам (5.3) и (5.1) потенциал $\Phi(M)$. Воспользовавшись преобразованиями, обратными (2.2), получим обобщенный потенциал $\varphi(p,q)$, подставляя который в дифференциальные уравнения (4.4) и интегрируя которые при начальном условии (4.3) найдем положение границы Γ_t в любой момент времени $t>0$.

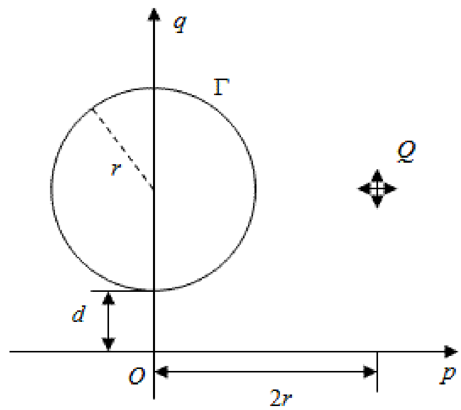

Рис.1. Область фильтрации

Рассмотрим конкретную задачу эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей. Пусть в области фильтрации работает нагнетательная скважина дебита Q, которую моделируем точечным источником мощностью Q, расположенная на расстоянии r от бассейна в форме круга радиуса r. Ординаты центра круга и источника совпадают. Бассейн находится на расстоянии d от оси Op (см. рис. 1.).

В начальный момент времени граница раздела Γ_0 совпадает с контуром нагнетательной скважины. Будем исследовать время T, за которое «загрязнение», нагнетаемое скважиной попадет в бассейн Γ в случаях когда $\rho=1$, $\rho=q^2$, $\rho=sh^2q$ (в этих случаях вид фундаментального решения известен и приведен, например, в [2], в случаях $\rho=q^2$, $\rho=sh^2q$ в области фильтрации присутствует сингулярная линия σ, совпадающая с осью Op). Примем радиус r за характерный размер, при расчетах для определенности положим $d=\frac{1}{4}r$. За характерное время примем время T_0, за которое загрязнение достигает бассейна в однородном изотропном грунте.

На рис. 2 приведены графики зависимости времени «загрязнения» бассейна от соотношения k_q / k_p для случаев $\rho = 1$, $\rho = q^2$, $\rho = sh^2 q$. Как видно из графиков, наибольший рост времени T наблюдается в случае $\rho = sh^2 q$.

В случае небольших k_q / k_p, времена загрязнения бассейна T различаются незначительно. Так времена загрязнения для $\rho = sh^2 q$ и $\rho = 1$ в случае $k_q / k_p < 1.7$ различаются не более чем на 10%, а для $\rho = q^2$ и $\rho = 1$ не более чем на 7%.

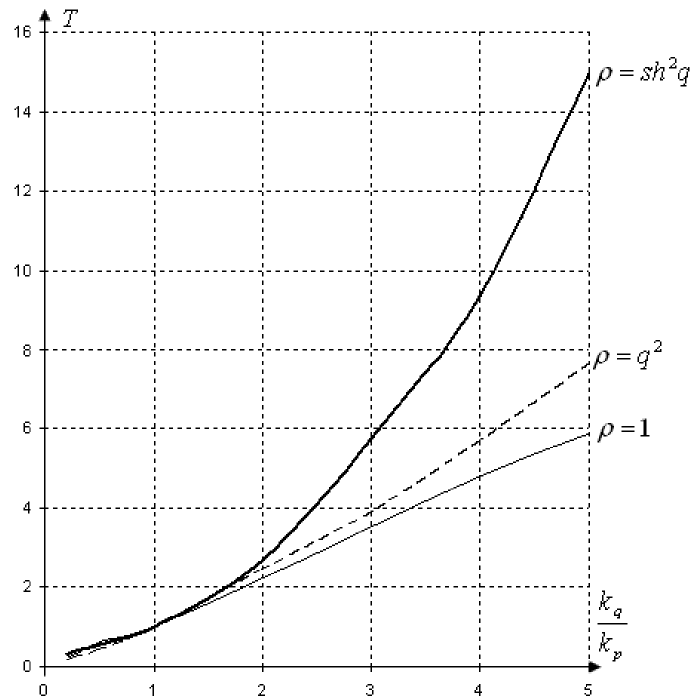

Рис.2. Зависимость времени T достижения бассейна в виде окружности загрязнением от источника от k_q / k_p для слоев проницаемости $\rho = 1$, $\rho = q^2$, $\rho = sh^2 q$.

В общем случае решение, основанное на уравнении (5.5) может быть только численным. Предполагаем, что применение метода дискретных особенностей в решении данной задачи позволило бы исследовать любые ситуации, когда бассейн ограничен произвольной кривой (класса Ляпунова).

Дальнейшее развитие исследований связано с обобщением задачи на анизотропно-неоднородные среды с более сложными, чем прямолинейная, типами анизотропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пивень В.Ф. Единственность решения граничных задач фильтрации в анизотропно-неоднородной пористой среде // Вісник Харківского національного університету №775. Харьков. 2007. с. 205-215.
2. Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости.- Орёл. Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет. 2006. 508 с.
3. Пивень В.Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде // Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ».- Харьков-Херсон. 2007.
4. Пивень В.Ф. Уравнения двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое грунта и их преобразование к каноническому виду // Вестник науки (сборник научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физико-математического факультета). Орел. Изд-во ГОУ ВПО «Орловский госуниверситет». 2007.
5. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функции комплексного переменного в задачах физики и техники.-М:. Высшая школа. 1983.160 с.