

Расчет гидродинамических характеристик потока вязкой несжимаемой жидкости методом R-функций

И. А. Баранов, О. В. Кравченко, И. Г. Суворова

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина

A mathematical model of a planar flow of an incompressible viscous fluid is constructed in this work. According to this model software has been worked out on the basis of R-function method in the programme system POLE. The results of numerical experiments are presented.

Моделирование физических процессов, протекающих во многих машинах и аппаратах, связано с расчетом гидродинамических полей. Гидродинамические характеристики потока определяют параметры явлений, наблюдаемых в отдельных элементах машин и аппаратов. Так, например, кавитационные процессы взаимосвязаны со статическим давлением в потоке. Потери давления в некоторых случаях позволяют прогнозировать количество диссипированной энергии при прохождении потока через установку. Необходимость определения гидродинамических характеристик приводит к решению задач математической физики в областях сложной формы. В таких задачах важную роль играет форма каналов, которые могут обладать рядом геометрических особенностей [1]. Адекватный учет геометрической информации очень важен, но реализуется в различных вычислительных методах с разной степенью эффективности.

Метод R-функций (RFM), разработанный академиком НАН Украины В.Л. Рвачёвым [2], позволяет учесть геометрическую информацию о каналах на аналитическом уровне и точно удовлетворить граничным условиям, кроме того, он является эффективным математическим аппаратом для вычисления взаимосвязанных задач гидродинамики. Решив одну краевую задачу, получаем ее приближенное решение в аналитическом виде, которое можно использовать при решении других задач, причем данная “цепочка” задач поддерживается средствами системы POLE [2,3]. Однако для успешного решения в каждом конкретном случае часть аналитической работы должна быть выполнена с учетом специфики задачи.

Цель данных исследований – построение математической модели движения вязкой несжимаемой жидкости в каналах, применение метода R-функций совместно с методом наименьших квадратов для решения соответствующих задач математической физики и разработка программного обеспечения для расчета полей скоростей и давлений в гидродинамических потоках.

Определение поля скоростей позволяет найти распределение статического давления в потоке. Данный комплекс задач впервые численно решен с применением метода R-функций.

Расчет гидродинамических характеристик в элементах машин и аппаратов с высокой точностью востребован при их проектировании, поэтому данная задача является актуальной.

Постановка задачи для поля скоростей

Плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + Eu \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{Re} \Delta V_x = 0, \quad (1)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + Eu \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{Re} \Delta V_y = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Здесь (1), (2) – уравнения Навье-Стокса, (3) – уравнение неразрывности движения, Re – число Рейнольдса, Eu – число Эйлера.

Вводя функцию тока ψ с помощью соотношений $V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, система (1) – (3) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных 4-го порядка относительно функции тока ψ [4]

$$\frac{1}{Re} \Delta \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия для такого уравнения вытекают из условия прилипания на твердой стенке и скорости на входе.

Граничные условия

На твердой стенке имеем условие прилипания ($V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, $V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$),

отсюда следует, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = (\nabla \psi, \vec{\tau}) = 0;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = (\nabla \psi, \vec{n}) = 0.$$

Так как $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$ на твердой стенке, то $\psi = const$ на этой же стенке.

На входе задается параболический профиль скорости. Более подробно граничные условия будут рассмотрены на примере обтекания цилиндра, расположенного между двумя пластинами.

Постановка задачи для поля статического давления

Уравнение для статического давления

Из системы уравнений Навье-Стокса, проинтегрировав (1) по x , (2) по y , получаем

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + V_x \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_y \frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial x} + Eu \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^3 V_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V_x}{\partial y^2 \partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_x \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + V_y \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + Eu \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^3 V_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 V_y}{\partial y^3} \right) = 0.$$

Сложив эти два уравнения и приведя подобные, с учетом из (3) $\frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial V_y}{\partial y}$,

имеем

$$\Delta P = \frac{2}{Eu} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial y} \right).$$

Или в терминах относительно функции тока ψ имеем:

$$\Delta P = \frac{2}{Eu} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right).$$

Граничные условия для статического давления

Из уравнений Навье-Стокса (1)–(2) получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Eu} \left(\frac{1}{Re} \Delta V_x - V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{Eu} \left(\frac{1}{Re} \Delta V_y - V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = (\nabla P, \vec{n}).$$

На твердой стенке. Учитывая условие прилипания ($V_x = 0, V_y = 0$), имеем

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \left(\left(\frac{1}{Eu Re} \Delta V_x, \frac{1}{Eu Re} \Delta V_y \right), \vec{n} \right) = \frac{1}{Eu Re} \Delta((V_x, V_y), \vec{n}) = \frac{1}{Eu Re} \Delta V_n,$$

где V_n – нормальная компонента скорости к твердой стенке.

Пусть твердая стенка описывается уравнением $s(x, y) = 0$,

где $s(x, y)$ – функция, нормализованная до первого порядка.

$$\text{Тогда } V_n = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{Eu Re} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} \right).$$

На практике можно пользоваться упрощенным условием. С точки зрения теории ламинарного пограничного слоя [5], нормальная компонента скорости к твердой стенке в некоторой части пограничного слоя отсутствует.

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{Eu Re} \Delta V_n = 0.$$

На “входе-выходе”.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial n} &= \left(\left(\frac{1}{Eu} \left(\frac{1}{Re} \Delta V_x - V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \frac{1}{Eu} \left(\frac{1}{Re} \Delta V_y - V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} - V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right), \vec{n} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{Eu Re} (\Delta V_x, \Delta V_y) - \frac{1}{Eu} V_x \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}, \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{Eu} V_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}, \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \vec{n} \right) = \\ &= \frac{1}{Eu Re} \Delta V_n - \frac{1}{Eu} V_x \frac{\partial V_n}{\partial x} - \frac{1}{Eu} V_y \frac{\partial V_n}{\partial y}. \end{aligned}$$

Пусть “вход-выход” описывается уравнением $q(x, y) = 0$, где $q(x, y)$ – функция, нормализованная до первого порядка. Тогда $V_n = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial n} &= \frac{1}{Eu Re} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \frac{1}{Eu} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \right)}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{Eu} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \right)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Задача об обтекании цилиндра жидкостью, расположенного между двумя пластинами

Постановка задачи. Найти распределения поля скоростей и поля давления в потоке при обтекании цилиндра жидкостью, расположенного между двумя пластинами. Поставленная задача решается как “цепочка задач”. Решаем уравнение (4) для функции тока ψ , затем уравнение (5) относительно функции P в области Ω , представленной на рисунке 1.

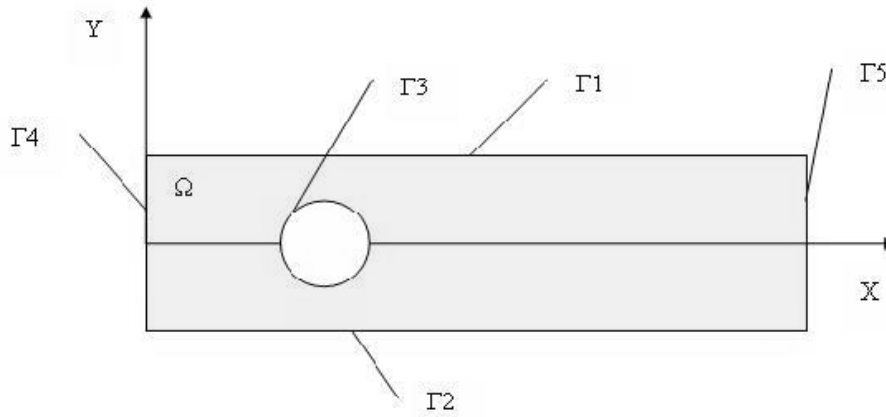


Рис. 1. Область решения задачи

Структура решения для уравнения (4) с соответствующими граничными условиями имеет вид: $\psi = \psi_1 + \psi_0$ [6,7,8], где ψ_0 обеспечивает продолжение граничных условий внутрь области и получено с помощью формулы "склейки" [2].

$$\psi_0 = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{\Psi_i}{w_i^2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{w_i^2}},$$

где, Ψ_i – значения функции ψ , заданные на участках границы Γ_i , описываемых уравнением $w_i = 0$.

Здесь

$$\Psi_1 = \frac{a}{3}, w_1 = \frac{a}{2} - y;$$

$$\Psi_2 = -\frac{a}{3}, w_2 = y - \frac{a}{2};$$

$$\Psi_3 = 0, w_3 = ((x-d)^2 + y^2 - r^2)/2r;$$

$$\Psi_4 = y - \frac{4y^3}{3a^2}, w_4 = x.$$

Таким образом, $\psi_0|_{\Gamma_i} = \Psi_i, \frac{\partial \psi_0}{\partial n}|_{\Gamma_i} = 0, i = 1, \dots, 4,$

где ψ_1 – неизвестная функция с нулевыми граничными условиями Дирихле и Неймана, которая имеет вид $\psi_1 = \omega_1^2 P_1$.

Здесь $P_1 = \sum_{i=1}^N A_i \zeta_i$ - неопределенная компонента структуры;

A_i – константы, которые необходимо определить;

ζ_i – специальные функции, образующие базис в гильбертовом пространстве, в котором ищется решение;

$$\omega_1 = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3);$$

$$\wedge_0(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} - \text{R-конъюнкция};$$

$$\vee_0(x, y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} - \text{R-дизъюнкция};$$

$$f_1 = x;$$

$$f_2 = \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) / a;$$

$$f_3 = ((x - d)^2 + y^2 - r^2) / 2r;$$

a – ширина канала;

d – величина, на которую центр цилиндра отстоит от входа;

r – радиус цилиндра;

Относительно функций ψ_1 и ψ_0 уравнение (4) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_1 - \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} \right\} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} = - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y}. \end{aligned}$$

После применения процесса линеаризации получим последовательность линейных уравнений [9]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_{n+1} - \left\{ \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y} \right\} - \\ & - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial y} = - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_0 + \\ & + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} - \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y}. \end{aligned}$$

Задача решается методом наименьших квадратов [10]. Приближенное решение понимается в смысле нормы $L_2(\Omega)$. Далее решаем уравнение (5) относительно функции P в области Ω .

Рассмотрим граничные условия для уравнения (5). На твердой стенке воспользуемся граничным условием (7). На входе и выходе (Γ_4 и Γ_5 соответственно) имеем параболические профили скоростей, так как в случае ламинарного потока для данной задачи левую и правую границы можно выбрать таким образом, чтобы возмущения от обтекаемого тела не дошли до границ. Следовательно, на входе и выходе касательная компонента скорости $V_\tau = 0$, кроме того, $V_r = 0$ в некотором объеме после входа и перед выходом (за счет выбора левой и правой границы).

Запишем условие Неймана на “входе-выходе”

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{Eu Re} \Delta V_n - \frac{1}{Eu} V_x \frac{\partial V_n}{\partial x} - \frac{1}{Eu} V_y \frac{\partial V_n}{\partial y}.$$

Это условие также можно упростить

$$\frac{1}{Eu Re} \Delta V_n = const, \text{ так как мы имеем параболический профиль скорости,}$$

значение константы определяется профилем скорости для каждой задачи;

$$\frac{1}{Eu} V_x \frac{\partial V_n}{\partial x} + \frac{1}{Eu} V_y \frac{\partial V_n}{\partial y} = \frac{1}{Eu} ((V_x, V_y), \nabla V_n) = \frac{1}{Eu} ((V_x, V_y), l \vec{\tau}) = \frac{1}{Eu} V_\tau = 0,$$

где l – некоторая константа.

$$\frac{\partial P}{\partial n} = const.$$

Рассмотрим производную по касательной от функции давления на “входе-выходе”

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{Eu Re} \Delta V_\tau - \frac{1}{Eu} V_x \frac{\partial V_\tau}{\partial x} - \frac{1}{Eu} V_y \frac{\partial V_\tau}{\partial y}.$$

Так как $V_\tau = 0$ не только на входе непосредственно, но и в некотором объеме после входа и перед выходом, то $\frac{\partial V_\tau}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial V_\tau}{\partial y} = 0$; $\Delta V_\tau = 0$;

Отсюда следует

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = 0.$$

Поскольку условие Неймана на всей границе не дает однозначного решения уравнения Пуассона (только с точностью до константы), можно, например, на выходе задать условие Дирихле некоторой константой (так как $\frac{\partial P}{\partial \tau} = 0$). Таким

образом, мы зададим полную энергию потока и получаем однозначное решение.

Структура решения для уравнения (5) с соответствующими условиями имеет вид

$$P = P_2 \omega_2 - \omega \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial (P_2 \omega_2)}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial (P_2 \omega_2)}{\partial y} \right) - \omega \varphi + \omega_1^2 \omega_2 P_3 + C,$$

где:

$$\omega_1 = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3);$$

$$\omega = (f_2 \wedge_0 f_4) \wedge_0 (f_3);$$

$$\omega_2 = (b - x);$$

$$f_4 = x(b - x)/b;$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^N C_i \zeta_i;$$

$$P_3 = \sum_{i=1}^N D_i \zeta_i;$$

C_i, D_i – константы, которые необходимо определить.

b – длина плоского канала;

C – значение статического давления на выходе (константа задается из физической постановки задачи, в нашем случае $C = 1$);

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{\varphi_i}{w_i}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{w_i}} - \text{функция, значения которой на участках границы области}$$

совпадают с производной по нормали функции P на соответствующих участках границы, на которых задано условие Неймана. Эта функция построена по формуле склейки.

Здесь φ_i - условия Неймана, заданные на границах Γ_i :

$$\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\varphi_4 = \frac{8}{Eu Re a^2}.$$

Далее применяем метод наименьших квадратов.

Результаты вычислительных экспериментов

На следующих рисунках приведены результаты вычислительных экспериментов обтекания цилиндра жидкостью между двумя пластинами при различных числах Рейнольдса. Вычислительные эксперименты проводились на сетке 50×40 сплайнов 5-го порядка. Количество итераций 9.

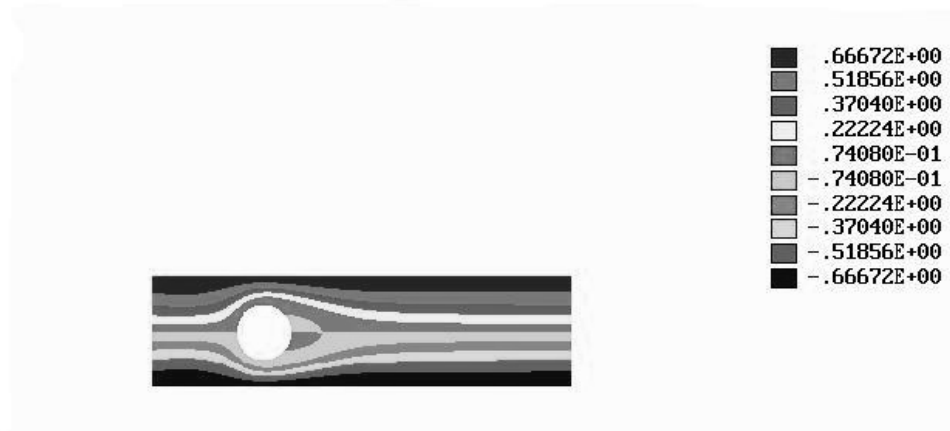


Рис.2. Функция тока ($Re=100$).

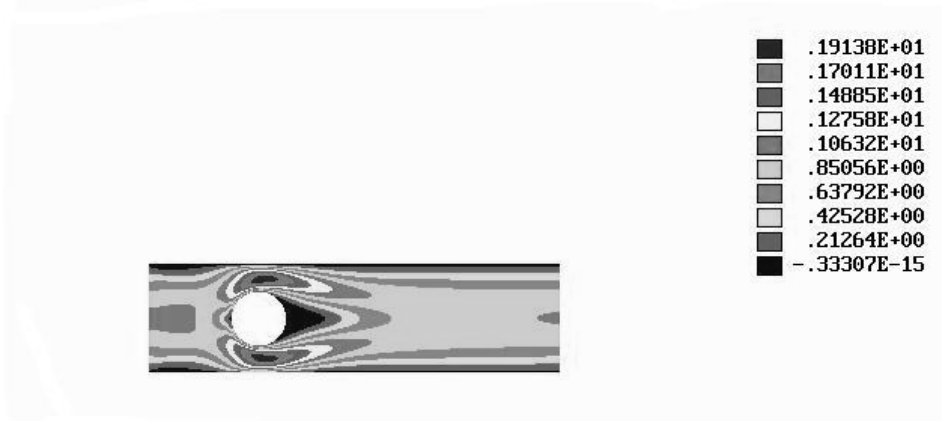


Рис.3. Функция модуля скорости ($Re=100$).

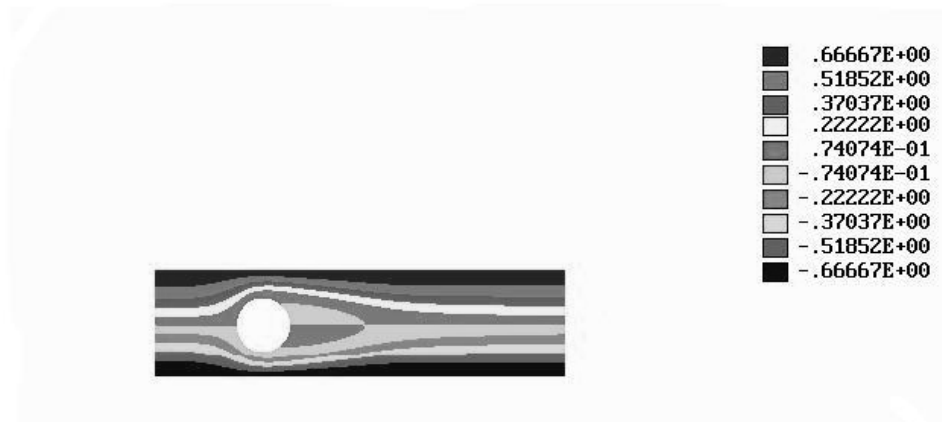


Рис.4. Функция тока ($Re=200$).

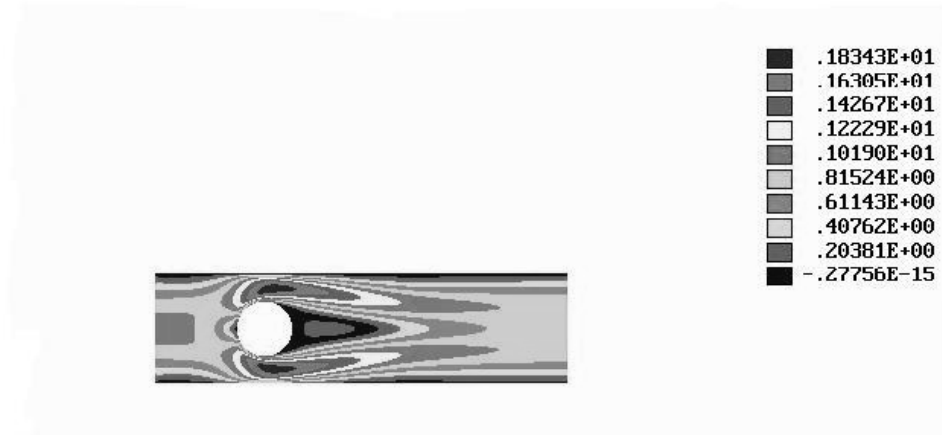
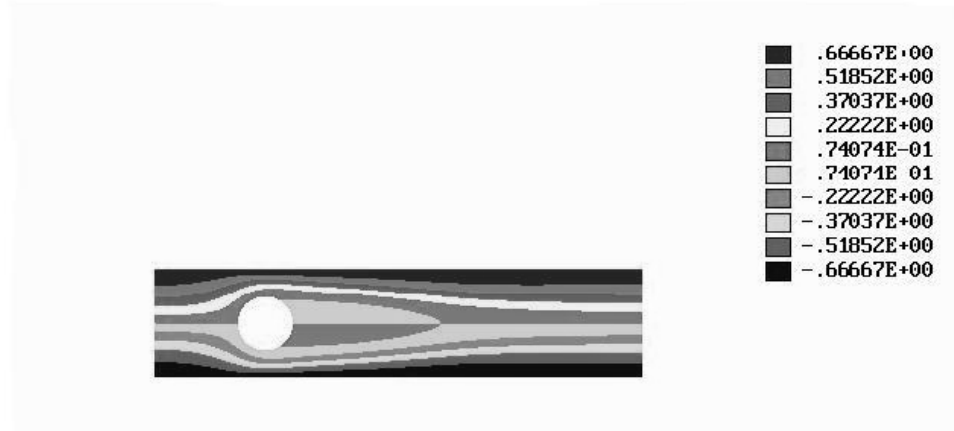
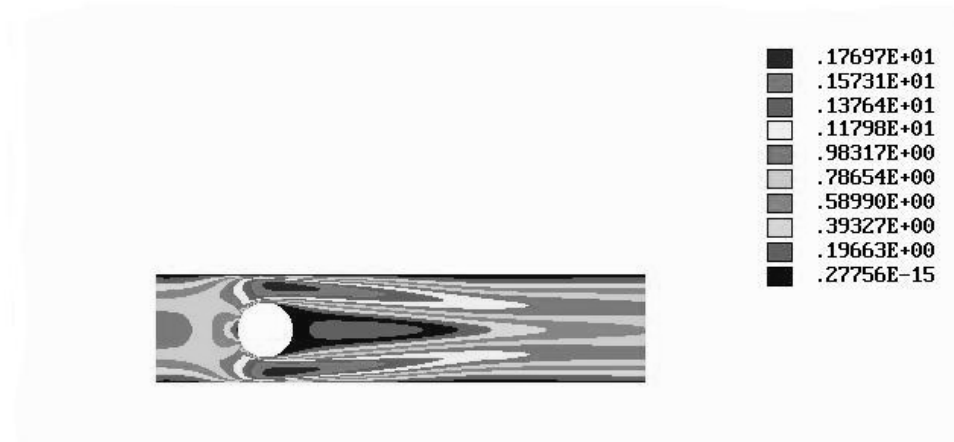


Рис.5. Функция модуля скорости ($Re=200$).

Рис.6. Функция тока ($Re=400$).Рис.7. Функция модуля скорости ($Re=400$).Рис.8. Функция статического давления ($Re=200$, $Eи=10$).

Выводы

Построена математическая модель движения вязкой несжимаемой жидкости. Разработано программное обеспечение для решения соответствующих уравнений для функции тока и статического давления в системе POLE с применением метода R-функций. Универсальность метода и программы позволяют проводить многопараметрические численные эксперименты для различных каналов.

Приведены результаты численных экспериментов для различных режимов обтекания жидкостью цилиндра между двумя пластинами.

Разработанный метод позволяет вычислять гидродинамические характеристики потока, благодаря которым можно определять кавитационные зоны в потоке, гидравлические сопротивления, диссипированную энергию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халатов А.А. Диаграмма режимов течения в одиночном сферическом углублении с острой кромкой /А.А. Халатов, В.Н. Онищенко // Пром. теплотехника. – 2005. – Т27. №4. – С. 5 – 10.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. –552 с.
3. Суворова И.Г. Автоматизация расчетов методом R-функций применительно к задачам стройиндустрии: Учеб.пособие / И.Г. Суворова, А.Н. Шевченко – Киев: Учеб.–метод. Каб. Высш. Образования, 1991.–60с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика т.6, Гидродинамика. – М. Наука, 1988.- 736 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. –М.: Дрофа, 2003 – 840 с.
6. Рвачев В.Л. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R-функций в системе ПОЛЕ-3 / В.Л. Рвачёв, И.Г. Суворова, Т.И. Шейко // Мат. методы и физ.-мех. поля.– Львов, 1991.–№ 33. – С.95-99.
7. Баранов И.А. Метод R-функций для расчета взаимосвязанных полей в гидротоках / И.А. Баранов, О.В. Кравченко, И.Г. Суворова // Вісн. Харк. Нац. Ун. – Сер. Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – Харків, 2007. – №780. – С.9–18.
8. Суворова И.Г. Математическое моделирование потока жидкости методом R-функций / И.Г. Суворова, О.В. Кравченко // Системні технології: Регіонал. Міжвуз. Зб. Наук. Пр. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип. 4 (45). – С. 57 – 69.
9. Суворова И.Г. Метод R-функций в исследованиях и расчетах физико-механических полей для задач строительства: Автореф. дис. ...д-ра техн. наук. – Харьков, 1991. – 21с.
10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М. Наука, 1970.- 512 с.