

## О вычислении поля скоростей вблизи обтекаемой поверхности

Д. В. Богомолов, А. В. Сетуха

*Военно-воздушная инженерная академия им. проф. Н.Е. Жуковского, Россия*

Рассмотрены вопросы корректности вычисления скорости жидкости вблизи твердых поверхностей в методе дискретных вихрей. Предложены уточненные расчетные формулы, позволяющие правильно вычислять значение вектора скорости на любом сколь угодно малом расстоянии от моделируемой поверхности, в том числе и вблизи дискретных вихрей.

### 1. Введение.

Вихревые методы широко используются при решении различных нестационарных задач гидродинамики. Широкий обзор этих методов можно найти в [1]. В работах С.М. Белоцерковского и его последователей развиты методы, основанные на аппроксимации поверхностей обтекаемых тел и вихревых следов за ними системами дискретных особенностей: дискретными вихрями в плоском случае, вихревыми отрезками или вихревыми рамками в пространственном случае [2, 3]. В работах И.К. Лифанова показано, что в этих методах при моделировании поверхностей обтекаемых тел и тонких вихревых пелен осуществляется дискретная аппроксимация интегральных представлений для полей скоростей с сингулярными интегралами на границе области течения [4]. При этом поле скоростей правильно вычисляется на расстояниях от обтекаемых тел, много больших шага дискретизации. Однако, при приближении к поверхностям, на которых расположены дискретные особенности, прямое вычисление полей скоростей в виде суперпозиции скоростей, индуцируемых этими особенностями, некорректно. Вместе с тем, например, при вычислении аэродинамических нагрузок на поверхностях тел, возникает необходимость вычисления краевых значений вектора скорости на поверхности [см. 5,6]. При моделировании движения вихревых следов вблизи поверхности, возникает необходимость вычисления вектора скорости на малых расстояниях от поверхности.

В настоящей работе исследован вопрос о численном определении поля скоростей вблизи твердой поверхности в методе дискретных вихрей, на примере задачи о потенциальном обтекании плоской пластины. Эта модельная задача удобна тем, что с одной стороны здесь отражены трудности, связанные с разрывностью поля скоростей при переходе через поверхность пластины, а с другой стороны в этой задаче легко произвести сравнение получаемых результатов с аналитическими данными. Основная цель исследования состояла в разработке алгоритмов, позволяющих вычислять значения вектора скорости на любом, сколь угодно близком расстоянии от поверхности пластины, причем, независимо от близости к дискретным вихрям, моделирующим поверхность пластины.

## 2. Постановка задачи и схема ее решения.

В численном эксперименте рассматривалось потенциальное обтекание пластины, расположенной на отрезке  $[-1, 0]$  оси  $OX$ . При этом для безразмерного поля скоростей возникают уравнения:

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0, \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

и условие на бесконечности:

$$\lim_{|M| \rightarrow \infty} \vec{V}(M) = \vec{V}_\infty, \quad M = M(x, y) \text{ – точка на плоскости течения,}$$

$$\vec{V}_\infty = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \alpha \text{ – угол атаки}$$

На поверхности пластины ставится условие непротекания:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$$

Кроме того, ставится условие безциркуляционности потока:

$$\oint_L \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0, \quad \text{где } L \text{ – контур, охватывающий пластину.}$$

В вихревом методе скорость жидкости в точке  $M$  ищется в виде:

$$\vec{V}(M) = \int_{-1}^0 \gamma(x) \vec{W}(M - M_0(x)) dx + \vec{V}_\infty, \quad M_0(x) = (x, 0) \text{ – точки на пластине,}$$

где:  $\gamma(x)$  – интенсивность вихревого слоя, размещенного на пластине;

$\vec{W}$  – поле скоростей, индуцируемое точечным вихрем, которое определяется формулой:

$$\vec{W}(M) = \frac{a}{2\pi} (-y, x), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad M = (x, y) \quad (1)$$

где:

$$a = \frac{1}{r^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Решение поставленной задачи сводится к сингулярному интегральному уравнению:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 \frac{\gamma(x) dx}{x_0 - x} = f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 0) \\ f(x_0) = \sin \alpha, \quad \alpha \text{ – угол атаки} \\ \int_{-1}^0 \gamma(x) dx = 0 \end{cases} \quad (3)$$

функция  $\gamma(x)$  может иметь интегрируемую особенность на концах пластины.

Представленное уравнение решается численно методом дискретных вихрей. В этом методе ищутся приближенные значения функции  $\gamma(x)$  в точках

$x_i = 1 + i \cdot h$ , где  $h = \frac{1}{n}$  – шаг разбиения,  $n$  – число точек разбиения пластины в

виде  $\gamma(x_i) \approx \frac{\Gamma_i}{h}$  и для неизвестных  $\Gamma_i$  (циркуляций дискретных вихрей), записывается система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma_i}{x_{0j} - x_i} = f(x_{0j}), & i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \Gamma_j = 0, & j = 1, \dots, n+1 \end{cases}$$

где:  $x_{0j} = x_i + \frac{h}{2}$  – контрольные точки (точки коллокации)

После того, как решена последняя система, приближенные значения вектора скорости в точке  $M$  определяются по формуле:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \cdot \vec{W}(M - M_0(x_i)) + \vec{V}_\infty \quad (4)$$

Интересен вопрос о поведении численных значений вектора скорости при приближении к пластине. Рассмотрим контрольную точку, лежащую на расстоянии  $\frac{1}{4}$  от носка пластины (т.е. контрольная точка с номером  $\frac{n}{4}$  и координатой по оси абсцисс  $x_0 = -0.75$ ). Соседний вихрь будет иметь номер  $\left(\frac{n}{4} + 1\right)$ . Проведем вертикальные прямые, равномерно распределенные между выбранной контрольной точкой и соседним с ней вихрем. Вертикальные прямые проведем таким образом, чтобы первая прямая проходила через контрольную точку, а последующие отстояли от нее на расстоянии  $\frac{h}{4}$ . Последняя прямая будет проходить через присоединенный вихрь. Указанные прямые задаются уравнениями: 1 –  $x = x_0$ , 2 –  $x = x_0 + 0.25 \cdot h$ , 3 –  $x = x_0 + 0.5 \cdot h$ , 4 –  $x = x_0 + 0.75 \cdot h$ , 5 –  $x = x_0 + h$ . Описанная схема разбиения пластины представлена на рисунке 1.

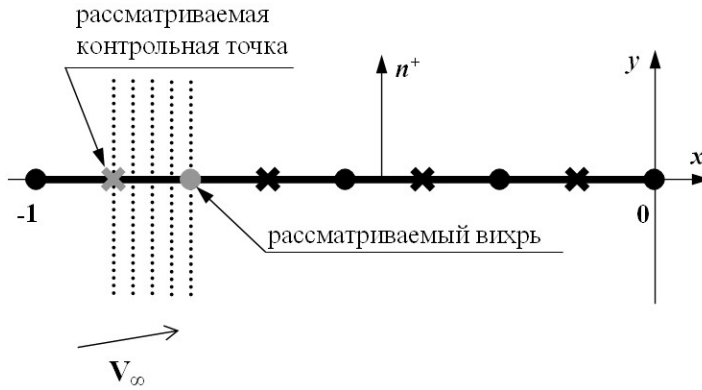


Рис. 1. Схема разбиения пластины

Вычисление скорости проводилось в точках построенных прямых со стороны положительной нормали к пластине. Отметим, что рассматриваемая задача для поля скоростей имеет аналитическое решение. Компоненты краевого значения вектора скорости на положительной стороне пластины имеют вид:

$$V_x^+ = V_{\infty} \cdot x + \frac{\gamma}{2}, \quad V_y^+ = 0$$

где:

$$\gamma = \frac{2 \left( x + \frac{1}{2} \right) \sin \alpha}{\sqrt{(x+1) \cdot x}} - \text{точное решение уравнения (3) (см. [4]).}$$

Из приведенных формул получаем значение касательной составляющей скорости в рассматриваемой расчетной точке  $V_x^+ = 1.152$ .

### 3. Расчет поля скоростей по прямой формуле

Рассмотрим поле скоростей, определяемое по формулам (1), (2).

Графически  $a(r)$  имеет вид кривой 1 на рис. 2, откуда видно, что при  $r \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow \infty$ , а значит и  $|W| \rightarrow \infty$ .

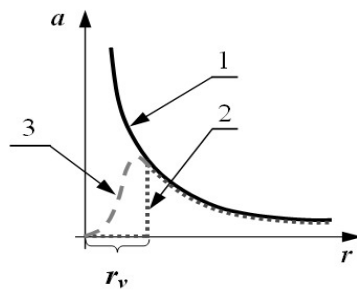


Рис. 2. Зависимости  $a(r)$  при различных вариантах моделирования

Были получены численные распределения вектора скорости с использованием точечных вихрей для различных значений  $h = 0.01, 0.025, 0.05$ . Результаты этих расчетов приведены на рис. 3. Видно, что поле скоростей, определяемое на удалении от пластины более чем  $h$ , имеет гладкий вид. В области меньшей  $h$  наблюдаются значительный разброс значений.

Нормальная составляющая скорости имеет нулевое значение на поверхности пластины только при измерении ее непосредственно в самой контрольной точке, а при приближении к дискретному вихрю наблюдается большой заброс нормальной составляющей скорости, достигающей бесконечной величины в точке расположения вихря.

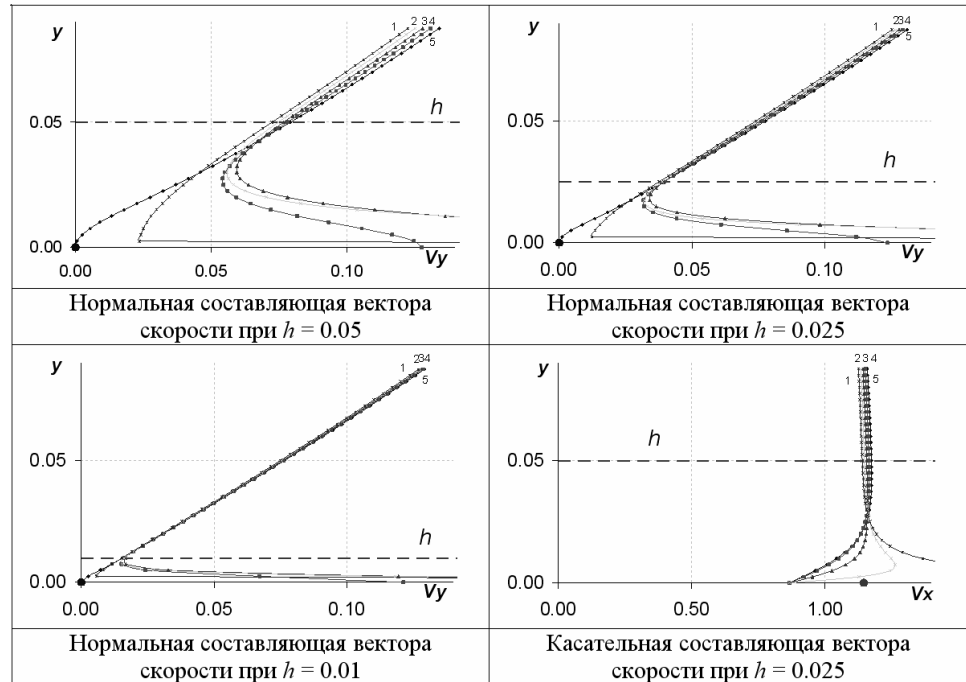


Рис. 3. Профиль скорости при вычислении его по прямой формуле

Для касательной составляющей вектора скорости также наблюдается разброс значений на расстояниях от пластины меньших чем  $h$  и несоответствие численного значения точному на поверхности пластины (здесь и далее на рис. 4-5, 7 точное значение компоненты скорости обозначено точкой на оси  $Ox$ ). Таким образом, при вычислении поля скоростей на удалении от поверхности пластины более  $h$  возможно применение прямых вычислений по записанным дискретным формулам. Но в непосредственной близости от пластины такие вычисления некорректны.

#### 4. Расчет поля скоростей с применением радиуса вихря

Для того чтобы избежать бесконечных скоростей на поверхности пластины вводят так называемый «радиус вихря» –  $r_v$ , внутри которого скорость ограничивается.

Сначала был проведен численный эксперимент по вычислению поля скоростей с использованием вихрей, индуцируемые скорости которых определяются формулой (1) с

$$a = \begin{cases} 0, & r < r_v \\ \frac{1}{r^2}, & r \geq r_v \end{cases}$$

Зависимость  $a(r)$  в данном случае имеет вид кривой 2 на рис. 2.

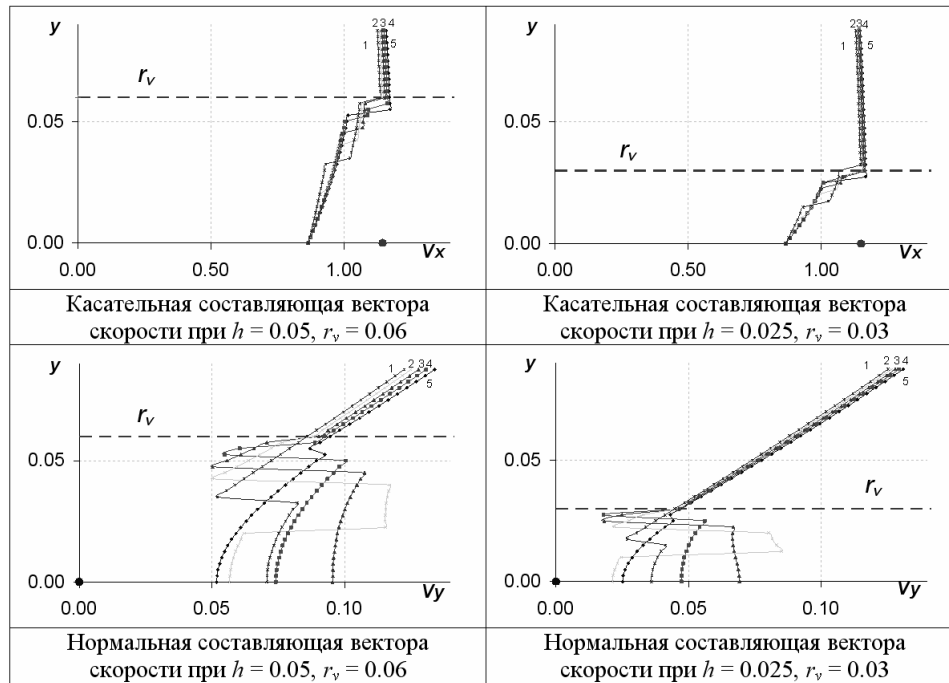


Рис. 4. Профиль скорости при вычислении его с применением радиуса вихря

Расчеты проводились для значений  $h=0.05, 0.025$  и  $r_v=0.06, 0.03$ . Результат моделирования представлен на рис. 4.

На графиках отчетливо видна граница раздела области с гладким профилем скоростей и области с явно выраженными метаниями составляющих скорости. Эта граница равна значению радиуса вихря (0.06 и 0.03 соответственно). По-прежнему наблюдается разброс значений нормальной составляющей скорости на расстояниях меньше  $h$ , но при этом исчезли бесконечные скорости на поверхности пластины. Касательная составляющая скорости ведет себя аналогичным образом. Краевые значения скорости, полученные численно, существенно отличаются от значения, получаемого из аналитического решения.

Значения касательной составляющей на расстоянии меньше  $h$  от пластины сходятся на поверхности пластины к значению  $V_x = \cos \alpha$ .

Обнуление скорости в области радиуса вихря приводит лишь к исчезновению бесконечного значения нормальной составляющей скорости на поверхности пластины, а колебания значений компонент скорости вблизи пластины сохраняются.

### 5. Расчет поля скоростей с использованием радиуса вихря и гладкого профиля при $r < r_v$

Рассмотрим далее вихри конечного радиуса с условием создания вихрем конечного размаха поля скоростей по формуле 1, где:

$$a = \begin{cases} \frac{1}{r^2}, & r \geq r_v \\ \frac{3r}{2r_v^2} - \frac{r^3}{2r_v^4}, & r < r_v \end{cases} \quad (5)$$

Зависимость  $a(r)$  для данного условия будет иметь вид кривой 3 на рис. 2.

Численный эксперимент проведем с  $h=0.05, 0.025$  и  $r_v=0.06, 0.03$ . Видно, что при этом исчезают значительные колебания значений скорости в области меньшей  $h$ . Но значение касательной составляющей скорости не соответствует точному решению на поверхности пластины (по-прежнему  $V_x = \cos \alpha$ ). Нормальная составляющая на поверхности пластины имеет меньший разброс значений, но не является нулевой.

### 6. Расчет поля скоростей с использованием радиуса вихря, гладкого профиля при $r < r_v$ и экстраполяции скорости из внешней области

Далее были проведены расчеты с использованием радиуса вихря, сглаживанием профиля скорости в области  $r < r_v$  и с применением процедуры экстраполяции скорости из внешней области. Экстраполяцию будем проводить для точек, расстояние от которых до пластины меньше  $r_v$ .

Схема экстраполяции представлена на рис. 6.

Пусть вычисление скорости проводится в точке  $(x_0, y_0)$  где  $|y_0| < r_v$ . Построим точки 1 и 2 с координатами  $(x_0, r_v)$   $(x_0, 2r_v)$  соответственно. В данных точках определим векторы скорости  $\vec{W}_1$  и  $\vec{W}_2$ . Результирующую скорость определим по формуле:

$$\vec{W} = \vec{W}_2 + \frac{2 \cdot r_v - y_0}{r_v} \left( \vec{W}_1 - \vec{W}_2 \right)$$

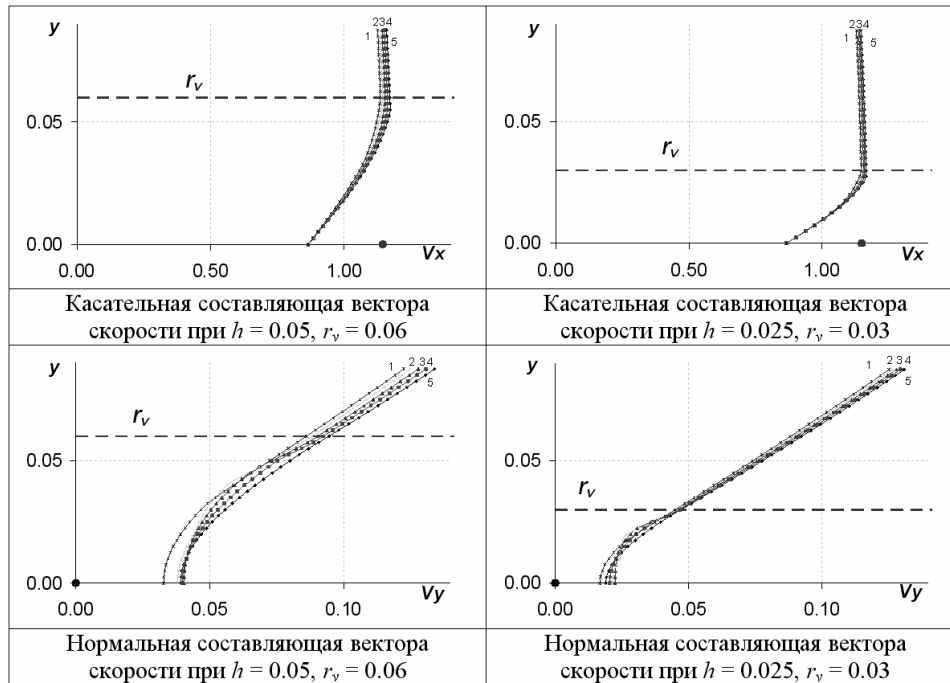


Рис. 5. Профиль скорости при вычислении его с применением радиуса вихря и сглаживания в области  $r < r_v$ ,

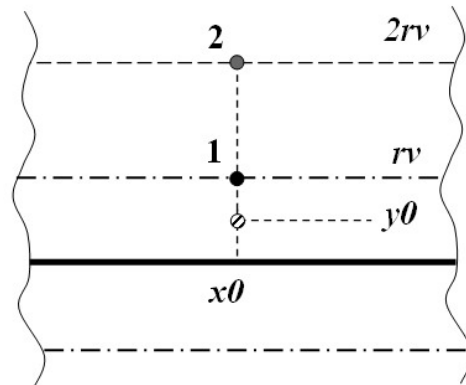


Рис. 6. Схема экстраполяции

Применение экстраполяции с  $h=0.05, 0.025$  и  $r_v=0.06, 0.03$ . позволит получить следующее поле скоростей, представленное на рис. 7.

Видно, что удалось добиться хорошего совпадения численных и аналитических значений компонент вектора скорости (относительная погрешность не более 2%).



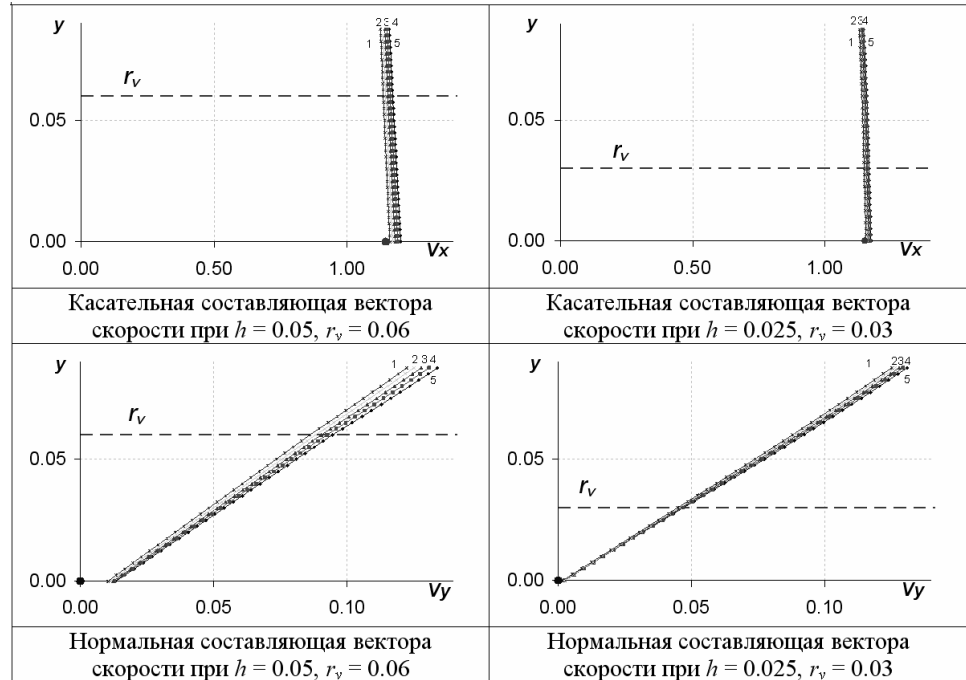


Рис. 7. Профиль скорости при вычислении его с применением радиуса вихря, сглаживания в области  $r < r_v$  и экстраполяции из внешней области

## 7. Выводы.

Анализ результатов моделирования показывает, что:

1. Вычисление поля скоростей по прямым формулам без применения радиуса вихря корректно на расстояниях от поверхности пластинки, больших, чем шаг дискретизации  $h$ . Вблизи поверхности пластины возникают значительные забросы значений компонент вектора скорости.

2. Использование вихрей конечного радиуса  $r_v > h$  позволяет добиться ограниченности вычисляемых компонент вектора скорости.

3. Применение сглаживания профиля скоростей в области  $r < r_v$  позволит получить гладкие профили скорости в области прилегающей к поверхности пластины.

4. Поле скоростей с использованием радиуса вихря и сглаживания скоростей в области  $r < r_v$  в совокупности с экстраполяцией скорости из внешней области позволяет достаточно точно моделировать поле скоростей вблизи пластины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сарпкая Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение. Сер. «А». – 1989, №10. – С. 1-60.
2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука. 1978. – 352с.

3. Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. Нелинейная теория крыла и ее приложения. – Алматы:Гылым, 1997.-448с.
4. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения. – Киев. Наукова думка, 2002. - 343с.
5. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. – 184 с.
6. В.А.Гутников, И.К.Лифанов, А.В.Сетуша. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок. // Изв. РАН МЖГ, 2006, №4. –с.78-92.