

Анализ одномерных моделей вынужденной интерференции

В. М. Куклин, А. С. Петренко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The numerical models of the induced interference effects are considered. In this case one can see slow dynamics of mode amplitudes and rapid change of phases induced by pump. The ways of describing such effects are discussed. Mappings "amplitude-previous amplitude" and "amplitude-distance" are applied in the work. Such mappings can reveal regular interference processes when explicit attractors and regions of chaotic pulse generation appear.

1. Введение

Вблизи порога многих неустойчивостей ширина спектра возбуждаемых пространственных мод сужается, однако достаточно значительна. При этом амплитуды возникающих возмущений даже в режиме насыщения неустойчивости остаются относительно малыми. Взаимодействие возникающих в результате неустойчивости пространственных мод между собой в этих условиях ослаблено, они в большей степени взаимодействуют с накачкой, причем их действие на накачку носит интегральный характер. Именно поэтому можно считать, что такие системы могут быть определены как квазилинейные. Для реализации таких процессов системы должны быть открытыми, то есть наряду с процессами поглощения и вывода энергии, должны существовать внешние источники, которые поддерживают эту накачку [1]. Важной особенностью подобных процессов в открытых системах является весьма медленное изменение амплитуд мод спектра и относительно быстрая динамика фаз мод, которая управляется накачкой, что дает основание называть возникающую при этом интерференцию вынужденной или индуцированной [2]. В условиях возбуждения плотных спектров колебаний в активных средах, когда спектральные интервалы между модами невелики, процессы вынужденной интерференции способны приводить к глубокой модуляции огибающей высокочастотного поля. Отметим, что максимальное значение локального максимума пропорционально ширине спектра Δk (корректнее, имеет верхним пределом величину, пропорциональную $\sqrt{(\Delta k / \delta k) 2 \sum_{m>0} u_m^2} = \sqrt{2 \sum_{m>0} u_m^2 \cdot N}$, где u_m - действительные амплитуды m -той моды спектра, δk - спектральная ширина одной моды и N - число мод в спектре [2]). Таким образом, заметные всплески огибающей пакетов волн можно наблюдать лишь в достаточно плотных спектрах. Однако ранее на процессы интерференции мод возбуждаемого спектра практически внимания не обращали (см, например, обзор [1]), хотя данный механизм может быть ответственным, например, за формирование в этих условиях тонкой структуры лазерных импульсов. Для описания появляющихся в экспериментах в активной среде с поглощением солитоноподобных импульсов огибающей волнового поля применяются различные модели с включением

сложных дополнительных предположений и механизмов (см., например, [3-5]). Однако, в случае возбуждения плотного спектра, можно показать, что при определенной фазовой синхронизации мод, в обычной активной поглощающей среде возможно появление кноидальных (то есть, солитоноподобных) волн огибающей [2], в чем нужно убедиться при выполнении прямых расчетов модели. Причем пространственное разрешение таких импульсов будет определяться величиной обратной разности волновых чисел ближайших мод-соседей в спектре. Подобные решения, анализ которых важен для ряда практических применений в нелинейной оптике и лазерной технике, можно было наблюдать и в проведенных в работе численных экспериментах. Это обстоятельство и определило цель исследований в предметной области, проведенных в настоящей работе.

Однако для решения данной задачи требуется обобщить математическую модель, использованную для анализа неустойчивости в активной поглощающей среде, инверсия которой поддерживается внешними источниками [1]. Следует значительно увеличить число мод спектра N и увеличить надпороговость системы для увеличения интенсивности возбуждаемого спектра $2 \sum_{m>0} u_m^2$, не

выходя за рамки применимости модели. При этом величина $\sqrt{2 \sum_{m>0} u_m^2 \cdot N}$,

определяющая верхнюю границу амплитуды огибающей также увеличивается. Для уменьшения времени расчетов можно воспользоваться процедурой исключения мод малой амплитуды (при этом необходимо провести анализ корректности такой процедуры), развить методы статистической обработки результатов – селекции импульсов огибающей.

Таким образом, цель данной работы не только в реализации моделей и в поиске их решений, а в большей степени в развитии разных форм анализа, опирающегося на возможности современных информационных технологий и позволяющего рассмотреть процессы с новых позиций и представлений. Другими словами, цель работы в развитии инструментария для проведения расчетов по моделям подобным данным, причем разной размерности. Ниже применяется тип селекции массива распределенных в двумерной плоскости (x, t) импульсов по амплитудам. Такая селекция в принципе позволяет создать не только удобную визуализацию распределения импульсов в пространстве, но и формировать различного вида распределения. В частности, это частота появлений импульсов как функция их амплитуды, расстояние между импульсами одной амплитуды, а также формирование отображений, в частности отображения «предыдущий импульс - последующий импульс». Такое отображение позволяет обнаружить, в частности, регулярные интерференционные процессы при появлении явно выраженных аттракторов и области хаотического появления импульсов.

2. Моделирование процесса формирования всплесков-импульсов для набора мод с постоянной амплитудой и дисперсией по фазовым скоростям

Рассмотрим поведение волнового пакета состоящего из мод равной амплитуды с фазой, которая представлена для каждого номера i ($1 < i < N$) следующим образом

$$\Phi_i = V_i \cdot t + \Phi_{i0}, \quad (1)$$

То есть, в волновом пакете представлено множество мод равной амплитуды с фазами Φ_i , $i = 1, 2, 3 \dots N$, которые имеют вполне определенные фазовые скорости $V_i = v_o + (i/N)^\alpha \cdot \Delta v$ и разные начальные значения $\Phi_{i0} = \Phi_i(t=0)$. Волновой импульс при этом можно представить как

$$E(\xi, t) = \sum_{n=1}^N u_n \text{Cos} \{ K_n \xi + \Phi_n \}, \quad (2)$$

Причем, $K_n = 1 + (\frac{n}{N})$, то есть длины волн $2\pi/K_n$ будут изменяться от 2π до π . В зависимости от величины $\alpha > 1$ или $\alpha < 1$ можно моделировать отклонения фазовой скорости от линейного закона изменения с ростом номера моды. Используя метод селекции всплесков-импульсов, можно получить следующие показательные характеристики процесса интерференции (см. рис.1.)

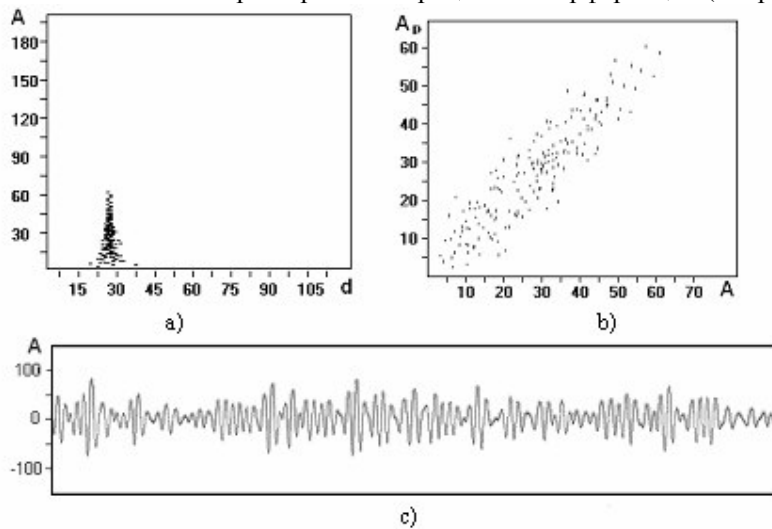


Рис1. а) расстояние между всплесками одной амплитуды. б). Отображение «предыдущая амплитуда – последующая амплитуда», в). вид огибающей – модуляции

Существование нескольких аттракторов в отображении говорит о формировании повторяемых нескольких интерференционных структур – крупномасштабной квазирегулярной модуляции колебаний. Важным параметром является величина $W_{sp} = \Delta v / v_o$ качественно характеризующая отношение разброса по фазовым скоростям к средней фазовой скорости колебаний (см. рис. 1). Разрушение аттракторов соответствует нерегулярной модуляции и наблюдается, в частности при увеличении параметра W_{sp} [6].

3. Математическая модель формирования пространственной структуры в активной среде с поглощением

Рассмотрим математическую модель формирования пространственной структуры в активной среде с поглощением на примере возбуждения лазерного излучения в одномерном случае. Нелинейная система уравнений, описывающая возбуждение лазерного излучения в одномерном случае при слабой надпороговости, при постоянной накачке, может быть записана в виде (см., например, [7]).

$$\begin{aligned} \frac{de_n}{dt} + \kappa e_n - i\Delta_n e_n &= -ip_n, \\ \frac{dp_n}{dt} + \Gamma p_n &= i\mu e_n, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \Gamma_0(1 - \mu) - \text{Im} \sum_n e_n p_n^* \end{aligned} \quad (1)$$

где e_n и p_n - пространственные моды безразмерных составляющих электрического поля и поляризации, μ - однородная составляющая поддерживаемой внешним источником инверсии заселенностей двухуровневой активной среды, Γ_0, Γ, κ - нормированные время релаксации инверсии, ширина линии и потери в резонаторе, причем условия слабого превышения порога генерации сводятся к условиям $\text{Im} \omega \ll \Gamma, \kappa$ и $1 - \mu \ll \mu$, то есть, пространственными возмущениями инверсии можно пренебречь.

При условии $\mu > \mu_{thr} = k\Gamma$ в активной среде возникает неустойчивость, причем, если превышение порога небольшое (т.н. слабая надпороговость), $0 < \mu - k\Gamma \ll \mu$, то тогда инкремент неустойчивости небольшой, выполняются

сильные неравенства $\frac{1}{e_n} \frac{de_n}{d\tau} \ll \Gamma, \Gamma_0, k$; аналогично и для других переменных,

также $1 - \mu < \mu$.

Перепишем уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\frac{d}{d\tau} + k - i\Delta_n \right] \left[\frac{d}{d\tau} + \Gamma \right] - \mu \right\} \cdot e_n &= 0, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \Gamma_0(1 - \mu) - \text{Im} \sum_n e_n p_n^* \end{aligned} \quad (2)$$

Пренебрегая вторыми производными в предыдущих уравнениях, получаем:

$$\begin{aligned} \left\{ (k - i\Delta_n + \Gamma) \frac{d}{d\tau} + (k - i\Delta_n)\Gamma - \mu \right\} \cdot e_n &= 0, \\ p_n &\approx (ik + \Delta_n) \cdot e_n, \\ \mu &\approx 1 - \sum_n |e_n|^2 (k/\Gamma_0) \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$|e_n|^2 (k/\Gamma_0) \frac{1}{k+\Gamma} = |E_n|^2,$$

$$\tau = -t \frac{k+\Gamma}{k\Gamma-1},$$

$$\delta^2 = \frac{1-k\Gamma}{(\Gamma^2-1)(k+\Gamma)},$$

$$\Lambda_n^2 = \Delta_n^2 \frac{\Gamma^2+1}{(k+\Gamma)(1-k\Gamma)}$$

В этих обозначениях уравнения (2) можно записать в виде:

$$\frac{dE_n}{d\tau} = [1 - \Lambda_n^2 - \sum_m |E_m|^2] E_n - i \frac{\Lambda_n}{\delta} [1 - \delta^2 \Lambda_n^2] E_n \quad (3)$$

Представляя уравнение (3) в виде системы уравнений для действительных амплитуд и фаз, получаем:

$$dA_n / d\tau = [1 - \Lambda_n^2 - \sum_m A_m^2] A_n$$

$$d\alpha_n / d\tau = -\Lambda_n \delta^{-1} [1 - \delta^2 \Lambda_n^2] \quad (4)$$

Таким образом, мы рассматриваем задачу Коши для уравнений

$$dA_n / d\tau = [1 - \Lambda_n^2 - \sum_m A_m^2] A_n,$$

$$d\alpha_n / d\tau = -\Lambda_n \delta^{-1} [1 - \delta^2 \Lambda_n^2],$$

С начальными условиями:

$$\alpha_n(0) = R(0; 2\pi)$$

$$A_n(0) = 1/N$$

Где $R(0; 2\pi)$ - это равномерное распределение на интервале $(0; 2\pi)$, а N - количество рассматриваемых мод.

4. Дискретная модель и численный эксперимент

Для численного решения системы уравнений (4) используется явная схема Эйлера

$$(A_n)_i = (A_n)_{i-1} + \Delta\tau [1 - \Lambda_n^2 - \sum_m (A_m)_{i-1}^2] (A_n)_{i-1}$$

$$(\alpha_n)_i = (\alpha_n)_{i-1} - \Delta\tau \Lambda_n \delta^{-1} [1 - \delta^2 \Lambda_n^2]$$

Для выбора частоты дискретизации $\Delta\tau$ проводилось сравнение результатов вычислений при шаге дискретизации $\Delta\tau$ и $\Delta\tau/2$. На рис.2 показан график изменения погрешности $R_{d\tau}(\tau) = \frac{|A_m - A'_m|}{A_m} \cdot 100\%$, где A_m - это амплитуда

центральной моды спектра, полученная при шаге $\Delta\tau$, а A'_m - это амплитуда центральной моды спектра, полученная при шаге $\Delta\tau/2$.

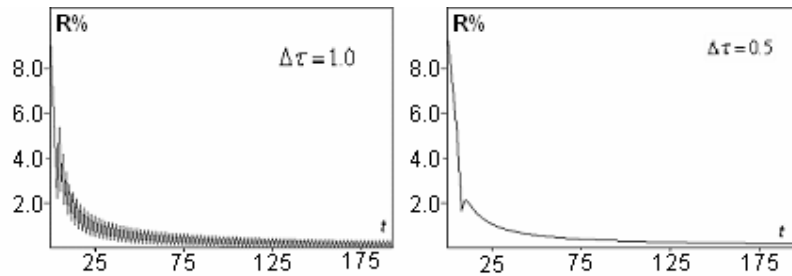


Рис. 2 зависимость погрешности $R_{d\tau}(\tau) = \frac{|A_m - A'_m|}{A_m} \cdot 100\%$ от времени при различных $\Delta\tau$

На рис. 2 видно, что разница в результатах вычислений при уменьшении $\Delta\tau$ быстро убывает со временем. А поскольку при рассмотрении процесса генерации лазерного импульса интерес представляет стадия развитой неустойчивости, когда энергия спектра достигает своего порогового значения, для проведения численного эксперимента было выбрано $\Delta\tau = 1.0$

В режиме развитой неустойчивости, инверсия μ стремится к своему пороговому значению, равному $\mu_{thr} = \kappa\Gamma$, энергия спектра $I_{sp} = \sum_m A_m^2$ достигает своего максимального значения и слабо меняется со временем, что свидетельствует о формировании квазиустойчивого физического состояния системы (см. рис.3)

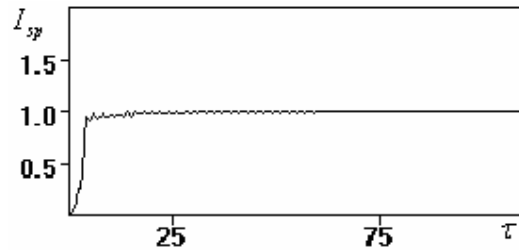


Рис. 3. Энергия спектра $I_{sp} = \sum_m A_m^2$ как функция времени.

При этом для инверсии μ справедливо соотношение $(1 - \mu)/(1 - \mu_{thr}) \approx \sum_n |E_n|^2$. Рост амплитуд спектра приводит к уменьшению уровня накачки инверсии μ , при этом моды с большими значения Δ_n

становятся затухающими, что приводит к уменьшению ширины спектра волнового пакета. Этот механизм конкуренции мод обусловлен, так называемым, «истощением накачки». Характер изменение количества мод в спектре, амплитуда которых превышает величину $A_{MIN} = 0.5/N$ (то есть, так называемых «значимых мод») приведен на рис. 4.

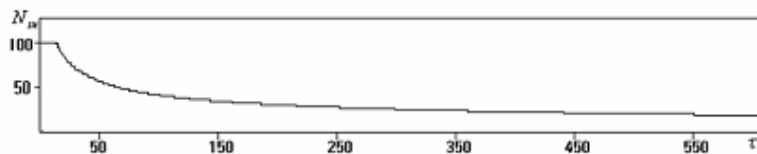


Рис.4. Количество «значимых мод» спектра, амплитуда которых превышает значение $A_{MIN} = 0.5/N$.

Энергия спектра (интегральная характеристика процесса) после выхода на развитый (квазилинейный) режим неустойчивости практически не изменяется. При этом происходит постепенное уменьшение количества мод спектра, амплитуда которых превышает любое наперед заданное значение. Фактически уменьшается количество возбужденных степеней свободы, что свидетельствует о формировании структуры поля высокой четкости. В данном случае генерация переходит в практически одномодовый режим.

При проведении численного эксперимента для уменьшения объема вычислений и увеличения скорости счета применяется метод «исключения незначимых мод»: мод, амплитуда которых становится меньше $A_{MIN} = 0.5/N$. На рис. 5а приводится сравнение энергии спектра, вычисленной с применением метода «исключения незначимых мод» и энергии спектра, полученной при расчетах без отбрасывания незначимых мод. А на рис. 5б – сравнение амплитуд отдельных мод, полученных при применении метода исключения мод и при полных вычислениях для различных моментов времени. Сплошными линиями показаны амплитуды, полученные при применении метода исключения незначимых мод, а пунктиром амплитуды мод, полученные без исключения мод малой амплитуды. Мы видим, что система устойчива по отношению к отбрасыванию мод малой амплитуды.

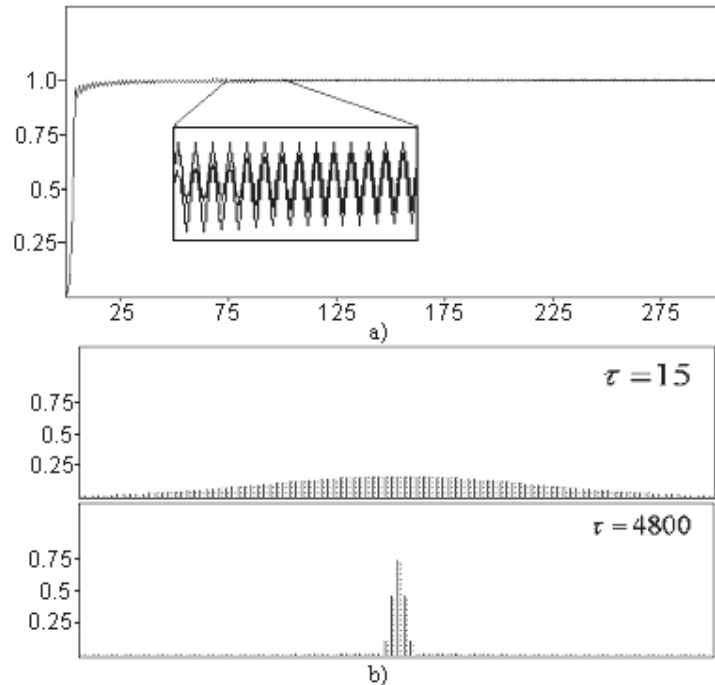


Рис. 5 Влияние исключения незначительных мод на результаты вычислений. а) на энергию спектра $I_{sp} = \sum_m A_m^2$ б) на амплитуду отдельных мод

6. Результаты численного эксперимента

В результате численного эксперимента было показано, что при слабом превышении порога генерации возникают квазипериодические во времени всплески амплитуды. На рис. 6а показана диаграмма, иллюстрирующая связь между амплитудой всплеска и временем, прошедшим с момента возникновения предыдущего всплеска. А на рис. 6б – диаграмма, связывающая амплитуду всплеска с амплитудой предыдущего всплеска.

Сравнивая диаграммы на рис. 6 с аналогичными диаграммами для волнового пакета, состоящего из мод равной амплитуды с фазой, которая представлена для каждого номера i ($1 < i < N$) следующим образом $\Phi_i = V_i \cdot t + \Phi_{i0}$, можно отметить, что в обоих случаях наблюдается формирование квазипериодических структур, однако, если для пакета мод одинаковой амплитуды можно выделить одно характерное время между всплесками, то для лазерного импульса в условиях слабой надпороговости характерно формирование более сложных структур.

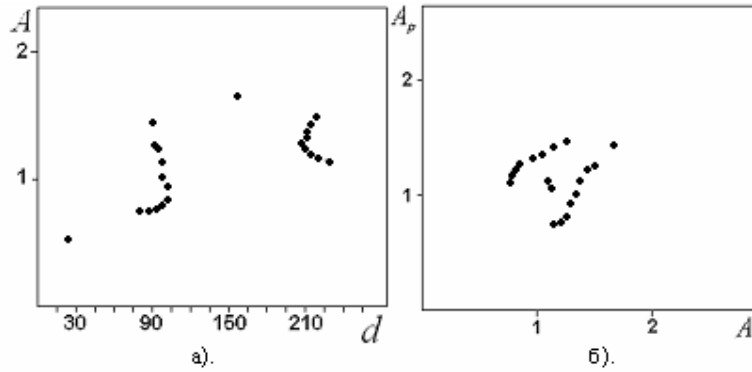


Рис.6. а - расстояние между всплесками одной амплитуды. б - Отображение «предыдущая амплитуда – последующая амплитуда»

Рассматривая пространственную структуру лазерного импульса, мы видим строго периодичную модуляцию (рис. 7), частота которой уменьшается при уменьшении количества значащих мод.

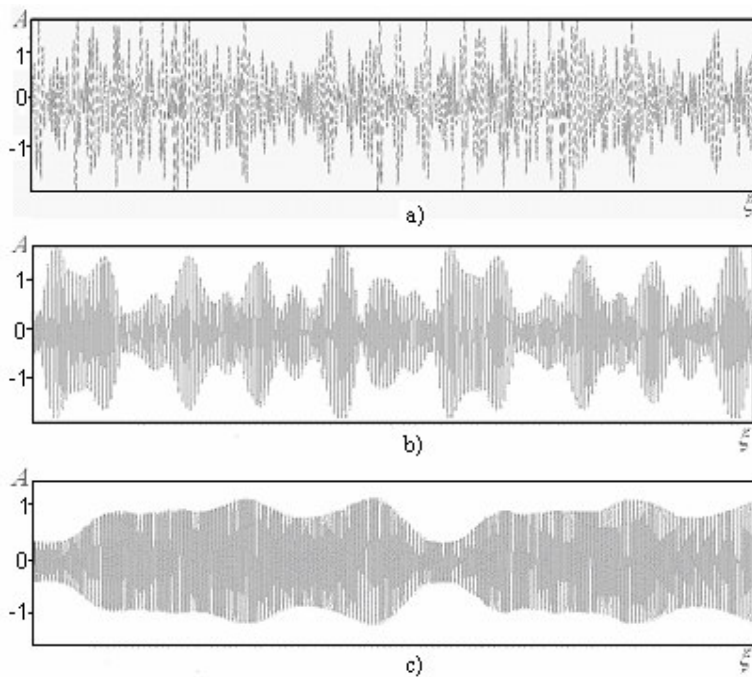


Рис. 7. вид огибающей – модуляции волны

Рассматривая рисунок 7, можно отметить, что вид импульса, формируемого набором мод с постоянной амплитудой и дисперсией по фазовым скоростям, соответствует начальной стадии развития неустойчивости в процессе генерации лазерного импульса, когда количество «значащих мод» еще значительно.

7. Заключение

Особенностью динамики процессов вынужденной интерференции является весьма слабое изменение полной энергии неустойчивых спектров и амплитуд отдельных мод при достаточно быстрой динамике их фаз. Это приводит к эффектам навязанной накачкой интерференции, которая формирует тонкую структуру интегрального импульса. В данной работе на основе методов селекции всплесков амплитуды и технологий распознавания образов – импульсов сделана попытка найти новые инструменты анализа подобных интерференционных процессов.

В частности изучен процесс сужения спектра, который приводит к снижению эффектов интерференции, что позволяет выделить важные для практических применений интервалы времени в развитии процесса генерации, когда можно ожидать максимальных значений амплитуд импульсов. Численные эксперименты показывают, что возникновение всплесков значительной амплитуды существенно зависит от начальных условий. Программа распознавания образов для обработки массивов данных позволила сформировать базы данных о количественных и качественных характеристиках исследуемых структур поля. Удалось определить вид распределений импульсов по амплитудам в зависимости от времени их повторений, а также построить ряд отображений, где обнаружены аттракторы, отвечающие регулярным процессам формирования импульсов.

Авторы выражают искреннюю благодарность Ю.В. Ганделю за весьма конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куклин В.М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах.//Украинский физический журнал, Обзоры – 2004 – Том 1, №1– с.49-81.
2. Kuklin V.M. Effect of induced interference and the formation of spatial perturbation fine structure in nonequilibrium open-ended system.// VANT– 2006 – №5 (5) – С.63-68.
3. Розанов Н.Н. Диссипативные оптические солитоны. // УФН – 2000 – Том 170, № 4 – С.462-465.
4. Ким А.В., Рябикин М.Ю., Сергеев А.М.От фемтосекундных к аттосекундным импульсам. // УФН – 1999 – Том 169, №1 – С.58-66.
5. Щелев Фемтосекундная фотоэлектроника (прошлое, настоящее, будущее) // УФН – 2000 –Том 170, №9 – С.1002-1017.
6. Kuklin V.M., Petrenko A.S. Induced Interference Modelling.// Proceedings. of the IXth Int. Conf. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science. Febr. 19-23, 2008, Slavsko, Ukraine, Proceedings. – Lviv, 2008. – p.312-313.
7. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. - М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит., 1983.- 320с.