Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
УДК 681.3
№ 809, 2008, с.170-177

Метод решения уравнений, параметры которых заданы нечетко

О. В. Серая
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт», Украина

Poorly studied problem connected with the decision of the algebraic equations (linear or nonlinear) which parameters are fuzzy set is considered. Two alternative approaches to the decision of this problem which realization allows to find precise and its indistinct decision are offered.

1. Введение

Решение алгебраических уравнений – неотъемлемый элемент математического инструментария, используемого при решении огромного числа практических задач. При этом решение определенных классов уравнений может быть получено аналитически, в других случаях используют итерационные или численные методы решения. При рассмотрении огромного числа практических задач возникает необходимость в решении алгебраических уравнений. Практическая процедура получения искомого решения во многих случаях осложняется в связи с тем, что математические модели реальных явлений, объектов, процессов, построенные в форме уравнений, достаточно часто содержат параметры, которые по тем или иным причинам не могут быть точно определены. Эти параметры неконструктивно считать случайными величинами, поскольку функции их распределения не известны, и, как правило, не могут быть с надлежащей степенью уверенности определены. В этой ситуации естественный путь моделирования неточности состоит в использовании нечетких описаний [1,2] параметров задачи, точное задание которых невозможно. Однако при этом возникает необходимость решения ряда проблем. Прежде всего, не вполне ясно, что значит решить уравнение, параметры которого заданы нечетко. Что собой представляет решение такой задачи? И, наконец, как это решение получить? В работе предпринята попытка дать ответы на эти вопросы.

В связи с этим целью статьи является разработка технологии решения уравнений с нечеткими параметрами.

2. Постановка задачи

Пусть необходимо решить уравнение

$$f(x; a_1, a_2, ..., a_m) = 0 \tag{1}$$

с одним неизвестным x и m параметрами $a_1, a_2, ..., a_m$, которые представляют собой нечеткие числа с известными функциями принадлежности $\mu(a_i)$, $i = 1,2,...,m$.

Можно предложить различные варианты решения этой задачи. Рассмотрим методы получения четкого и нечеткого решений.

А. Четкое решение задачи (1).

Введем зависящее от x нечеткое число $z = f(x; a_1, a_2, ..., a_m)$, нечеткость которого порождается нечеткостью параметров $a_1, a_2, ..., a_m$, $i = 1,2,...,m$. Используя стандартные правила выполнения операций над нечеткими числами и принцип обобщения Л.Заде [1,2], получим функцию принадлежности $\mu(z)$ нечеткого числа z.

Пусть $a_i^{(0)}$, $i = 1,2,...,m$, - набор модальных значений нечетких чисел a_i, $i = 1,2,...,m$. Решим теперь обычное, четкое уравнение

$$f(x; a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, ..., a_m^{(0)}) = 0. \quad (2)$$

Пусть $x^{(0)}$ - полученное (если это необходимо, то численно) решение уравнения (2).

Тогда четким решением задачи (1) будем называть значение x^*, минимизирующее площадь фигуры, ограниченной функцией принадлежности $\mu(z)$, и наименее уклоняющееся от $x^{(0)}$.

В. Нечеткое решение задачи (1).

Введем функцию $y = f(x; a_1, a_2, ..., a_m)$ и выразим x через $a_1, a_2, ..., a_m$ и параметры задачи $a_1, a_2, ..., a_m$ с помощью обратной функции

$$x = f^{-1}(y; a_1, a_2, ..., a_m),$$

если она существует в аналитической форме и может быть построена. Тогда искомое решение x^* равно

$$x^* = f^{-1}(0; a_1, a_2, ..., a_m). \quad (3)$$

Теперь с использованием правил выполнения операций над нечеткими числами найдем функцию принадлежности $\mu(x^*)$ нечеткого числа x^*, которая и определяет решение задачи.

3. Основные результаты

Рассмотрим технологию получения решения в вариантах А и В.

А. Введем критерий

$$J(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x; a_1, a_2, ..., a_m) dx + \left(x - x^{(0)}\right)^2, \quad (4)$$

который будем минимизировать.

Критерий (4) имеет ясный смысл. Его использование обеспечивает получение четкого числа x^*, для которого функция принадлежности $\mu(z)$ наименее размыта и имеет модальное значение, максимально близкое к нулю, то есть

$$x^* = \arg\min_x \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x; a_1, a_2, ..., a_m) dx + \left(x - x^{(0)}\right)^2 \right\}.$$

Рассмотрим простейший пример. Пусть задано линейное уравнение

$$a_0 - a_1 x = 0, \qquad (5)$$

где a_0, a_1 - нечеткие числа с функциями принадлежности

$$\mu(a_0) = \exp\left\{ -\frac{\left(a_0 - a_0^{(0)}\right)^2}{2\sigma_{a_0}^2} \right\}, \quad \mu(a_1) = \exp\left\{ -\frac{\left(a_1 - a_1^{(0)}\right)^2}{2\sigma_{a_1}^2} \right\}.$$

Введем нечеткое число $z = a_0 - a_1 x$ и построим

$$\mu(z) = \exp\left\{ -\frac{\left(z - \bar{z}\right)^2}{2\sigma_z^2} \right\},$$

где $\bar{z} = a_0^{(0)} - a_1^{(0)} x$, $\sigma_z^2 = \sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2$.

Теперь найдем решение уравнения (5) для модальных значений нечетких параметров a_0 и a_1:

$$x^{(0)} = \frac{a_0^{(0)}}{a_1^{(0)}}.$$

Тогда искомое четкое решение задачи (5) получим, минимизируя функционал (4)

$$J(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left(z - \bar{z}\right)^2}{2\sigma_z^2} \right\} dz + \left(x - x^{(0)}\right)^2.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left(z - \bar{z}\right)^2}{2\sigma_z^2} \right\} dz = \sqrt{2\pi}\sigma_z = \sqrt{2\pi}\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

то

$$J(x)=\sqrt{2\pi}\left(\sigma_{a_0}^2+\sigma_{a_1}^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(x-\frac{a_0^{(0)}}{a_1^{(0)}}\right)^2. \qquad (6)$$

Значение x^*, минимизирующее (6), найдем, дифференцируя (6) по x, приравнивая полученное выражение к нулю и решая полученное уравнение.

В соответствии с этим

$$\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_{a_1}^2x}{\left(\sigma_{a_0}^2+\sigma_{a_1}^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}+2\left(x-\frac{a_0^{(0)}}{a_1^{(0)}}\right)=0,$$

откуда

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma_{a_1}^2x=-\left(x-\frac{a_0^{(0)}}{a_1^{(0)}}\right)\left(\sigma_{a_0}^2+\sigma_{a_1}^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть, для конкретности, $a_0^{(0)}=4$, $a_1^{(0)}=2$, $\sigma_{a_0}^2=4$, $\sigma_{a_1}^2=1$. Численное решение этого уравнения, например, методом простой итерации дает $x^*=1.312$.

Заметим, что при конструировании критерия (4) составные его части могут быть взяты с весовыми коэффициентами, учитывающими, если это необходимо, различные и противоречивые требования к искомому решению: с одной стороны – минимальная неопределенность результата, а с другой – максимальное приближение к решению уравнения для модальных значений нечетких параметров. При этом соотношение (4) примет вид:

$$J(x)=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\mu(x;a_1,a_2,...,a_m)dx+(1-\alpha)\left(x-x^{(0)}\right)^2,\ \alpha\in[0;1].$$

B. Технологию получения нечеткого решения задачи проиллюстрируем на том же простейшем примере решения уравнения (5). Так как в этом случае

$$f(x)=a_0-a_1x,$$

то

$$x^*=f^{-1}(0;a_0,a_1)=\frac{a_0}{a_1}. \qquad (7)$$

Найдем функцию принадлежности $\mu(x^*)$ нечеткого числа x^*, определяемого (7).

В соответствии с принципом обобщения функция принадлежности нечеткого результата выполнения бинарной операции $x = \frac{a_0}{a_1}$ над нечеткими числами a_0 и a_1 с функциями принадлежности соответственно $\mu(a_0)$, $\mu(a_1)$ имеет вид

$$\mu(x) = \left[\max_x \int_{-\infty}^{\infty} \mu(a_1)\mu(a_1 x)da_1\right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(a_1)\mu(a_1 x)da_1 . \tag{8}$$

Вычислим второй сомножитель в (8).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(a_1)\mu(a_1 x)da_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left(a_1 - a_1^{(0)}\right)^2}{2\sigma_{a_1}^2}\right\}\exp\left\{-\frac{\left(a_1 x - a_0^{(0)}\right)^2}{2\sigma_{a_0}^2}\right\}da_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(a_1 - a_1^{(0)}\right)^2}{\sigma_{a_1}^2} + \frac{\left(a_1 x - a_0^{(0)}\right)^2}{\sigma_{a_0}^2}\right]\right\}da_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}A(a_1 x)\right\}da_1 .$$

$$A(a_1 x) = \frac{1}{\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2} \times \Big(\sigma_{a_0}^2 a_1^2 - 2\sigma_{a_0}^2 a_1 a_1^{(0)} + \sigma_{a_0}^2\left(a_1^{(0)}\right)^2 + \sigma_{a_1}^2 a_1^2 x^2 -$$

$$-2\sigma_{a_1}^2 a_1 a_0^{(0)} x + \sigma_{a_1}^2\left(a_0^{(0)}\right)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2}\left[a_1^2\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right) - 2a_1\left(\sigma_{a_0}^2 a_1^{(0)} + \sigma_{a_1}^2 a_0^{(0)} x\right) + \sigma_{a_0}^2\left(a_1^{(0)}\right)^2 + \sigma_{a_1}^2\left(a_0^{(0)}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}{\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2}\left[a_1^2 - 2a_1\frac{\sigma_{a_0}^2 a_1^{(0)} + \sigma_{a_1}^2 a_0^{(0)} x}{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2} + \left(\frac{\sigma_{a_0}^2 a_1^{(0)} + \sigma_{a_1}^2 a_0^{(0)}}{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{\sigma_{a_0}^2\left(a_1^{(0)}\right)^2 + \sigma_{a_1}^2\left(a_0^{(0)}\right)^2}{\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2} - \frac{\left(\sigma_{a_0}^2 a_1^{(0)} + \sigma_{a_1}^2 a_0^{(0)}\right)^2}{\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2} =$$

$$= \frac{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}{\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2}\left(a_1 - c\right)^2 + \frac{\sigma_{a_0}^4\left(a_1^{(0)}\right)^2 + \sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2\left(a_1^{(0)}\right)^2 x^2 + \sigma_{a_0}^2\left(a_0^{(0)}\right)^2\sigma_{a_1}^2 + \sigma_{a_1}^4\left(a_0^{(0)}\right)^2 x^2}{\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2} -$$

$$- \frac{\sigma_{a_0}^4\left(a_1^{(0)}\right)^2 + 2\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2 a_0^{(0)} a_1^{(0)} x + \sigma_{a_1}^4\left(a_0^{(0)}\right)^2 x^2}{\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)\sigma_{a_0}^2\sigma_{a_1}^2} =$$

$$= \frac{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}{\sigma_{a_0}^2 \sigma_{a_1}^2}\left(a_1 - c\right)^2 + \frac{\sigma_{a_0}^2 \sigma_{a_1}^2 \left(\left(a_1^{(0)}\right)^2 - 2a_0^{(0)} a_1^{(0)} x + \left(a_1^{(0)}\right)^2 x^2\right)}{\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)\sigma_{a_0}^2 \sigma_{a_1}^2} =$$

$$= \frac{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}{\sigma_{a_0}^2 \sigma_{a_1}^2}\left(a_1 - c\right)^2 + \frac{\left(a_0^{(0)} - a_1^{(0)} x\right)^2}{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}, \qquad c = \frac{\sigma_{a_0}^2 a_1^{(0)} + \sigma_{a_1}^2 a_0^{(0)} x}{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} A(a_1 x)\right\} da_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(a_1 - c)^2}{2\dfrac{\sigma_{a_0}^2 \sigma_{a_1}^2}{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}}\right\} \exp\left\{-\frac{(a_0^{(0)} - a_1^{(0)} x)^2}{2\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)}\right\} da_1 =$$

$$= \exp\left\{-\frac{(a_0^{(0)} - a_1^{(0)} x)^2}{2\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)}\right\} \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_{a_0}\sigma_{a_1}}{\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\dfrac{\sqrt{2\pi}\sigma_{a_0}\sigma_{a_1}}{\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}}}} \exp\left\{-\frac{(a_1 - c)^2}{2\dfrac{\sigma_{a_0}^2 \sigma_{a_1}^2}{\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2}}\right\} da_1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_{a_0}\sigma_{a_1}}{\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(a_0^{(0)} - a_1^{(0)} x)^2}{2\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)}\right\}. \tag{9}$$

Максимум (9) достигается при $x = \dfrac{a_0^{(0)}}{a_1^{(0)}}$ и равен $\dfrac{\sqrt{2\pi}\sigma_{a_0}\sigma_{a_1}}{\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$. Поэтому искомая функция принадлежности имеет вид

$$\mu(x) = \exp\left\{-\frac{(a_0^{(0)} - a_1^{(0)} x)^2}{2\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)}\right\} = \exp\left\{-\frac{\left(x - \dfrac{a_0^{(0)}}{a_1^{(0)}}\right)^2}{\dfrac{2}{\left(a_1^{(0)}\right)^2}\left(\sigma_{a_0}^2 + \sigma_{a_1}^2 x^2\right)}\right\}.$$

Для приведенных выше числовых параметров задачи имеем

$$\mu(x) = \exp\left\{-\frac{(x-2)^2}{2\left(4-\frac{x^2}{4}\right)}\right\}.$$

Понятно, что легкость получения в рассмотренном примере результата связана с предельной простотой уравнения (5). В реальных более сложных задачах успешность решения определяется тем, насколько трудным будет отыскание корней уравнения (1) с использованием обратной функции (3) и последующее построение соответствующей функции принадлежности.

Вместе с тем, функция принадлежности искомого нечеткого решения задачи приближенно может быть получена с использованием следующей итерационной процедуры. Зададим n возможных значений функций принадлежности нечетких параметров задачи, например, следующим образом $w = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$. Пусть проделано $(k-1)$ шагов процедуры. На очередной k-й итерации выполняются следующие операции. Для каждого из нечетких параметров задачи решим уравнение

$$\mu(a_i) = \frac{k}{n}, \qquad i = 1,2,...,m.$$

Так как все функции принадлежности – выпуклые вверх унимодальные функции, то эти уравнения имеют два корня: $\left(a_{ik}^{(1)}, a_{ik}^{(2)}\right)$, $i = 1,2,...,m$. Теперь сформируем набор четких значений параметров задачи, выбирая меньшие в каждой паре корней. При этом получим $\left(a_{1k}^{(1)}, a_{2k}^{(1)}, ..., a_{mk}^{(1)}\right)$ и решим четкое уравнение

$$f\left(x; a_{1k}^{(1)}, a_{2k}^{(1)}, ..., a_{mk}^{(1)}\right) = 0.$$

Пусть это уравнение имеет единственный корень $x_k^{(1)}$, который можно трактовать как нечеткое решение уравнения (1) с уровнем принадлежности, равным $\frac{k}{n}$. Точно так же решим уравнение

$$f\left(x; a_{1k}^{(2)}, a_{2k}^{(2)}, ..., a_{mk}^{(2)}\right) = 0,$$

получив при этом значение $x_k^{(2)}$ с тем же уровнем принадлежности $\frac{k}{n}$. Естественно считать, что все $x \in \left[x_k^{(1)}, x_k^{(2)}\right]$ имеют степень принадлежности искомому решению задачи не ниже, чем $\frac{k}{n}$. Очередная итерация закончена.

Последовательное выполнение описанных операций для $k = 1,2,\ldots,n-1$ обеспечивает получение вложенных интервалов $\left[x_{n-1}^{(1)}, x_{n-1}^{(2)}\right] \subset \left[x_{n-2}^{(1)}, x_{n-2}^{(2)}\right] \subset \ldots \subset \left[x_1^{(1)}, x_1^{(2)}\right]$, накрывающих нечеткие значения решения уравнения (1) со степенями принадлежности, не меньшими соответственно, чем $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \ldots, \frac{1}{n}$.

Приближенное построение функции принадлежности для искомого нечеткого решения задачи завершено.

4. Выводы

Рассмотрены возможные подходы к решению алгебраических уравнений, параметры которых заданы нечетко. Реализация соответствующих вычислительных процедур позволяет получить четкое решение задачи (в виде числа) и нечеткое решение (в виде функции принадлежности). Для нечеткого решения задачи предложена простая технология приближенного построения функции принадлежности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Information Sciences, 1975. – vol.8. pp 199-251.
2. Zadeh L.A. Theory of fuzzy sets. Encyclopedia of Computer science and Technology, New-York. – 1977.
3. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 206с.
4. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей: Пер. с франц. – М.: радио и связь, 1990. – 283с.