

Численно-аналитическое моделирование дифференциально-алгебраических систем второго порядка при импульсных возмущениях

А. В. Трубицын

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Is considered modeling nonlinear electric circuits by means of simlinear differential - algebraic equations of the second order with impulse action. Theorems of existence and uniqueness for the specified equations are proved. The numerical method for a finding is resulted.

1. Актуальность задачи и истоки исследования

Здесь рассматривается моделирование нелинейных электрических цепей с помощью полулинейных дифференциально - алгебраических или вырожденных уравнений второго порядка с импульсными воздействиями (IDAEs).

В [2] переходные процессы в электрических цепях рассматриваемого класса описываются системой дифференциально - алгебраических уравнений первого порядка с импульсными воздействиями. В [3,Гл.6] изучались неявные и вырожденные дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями в более общих банаховых пространствах и их приложения в физике; в [3,Гл.7] на основе полученных теоретических результатов для конкретной физической задачи построен численный метод для приближённого решения. В [4] рассматривались вырожденные полулинейные дифференциальные уравнения второго порядка в банаховых пространствах с импульсными воздействиями, но с начальными условиями другого типа. В [5] изучались неявные полулинейные уравнения первого порядка в банаховых пространствах при импульсных воздействиях.

Моделирование линейных электрических цепей с помощью линейных дифференциально - алгебраических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями рассматривалось в работе [9].

2. Нерешенные проблемы и цели работы

Цель работы заключается в моделировании электрических цепей с импульсными воздействиями с помощью вырожденных полулинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Получены достаточные условия существования решения вырожденного полулинейного дифференциального уравнения с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени. Построен и обоснован численный метод для решения полученной задачи.

3. Моделирование эффектов импульсных возмущений в двухконтурной электрической цепи

Электрический двухполюсник, изображенный на рис.1, состоит из двух индуктивно связанных нелинейных контуров (осцилляторов). На внешние клеммы двухполюсника подается известный ток $I(t)$. Требуется найти внешнее напряжение $U(t)$, внутренние напряжения U_{C_1} , U_{C_2} , U_{L_1} , U_{L_2} и токи I_{L_1} , I_{L_2} , I_{C_1} , I_{C_2} на элементах цепи, при импульсных возмущениях в заданные моменты времени (см. (7)).

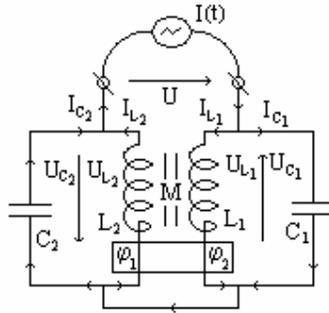


Рис. 1. Нелинейная электрическая цепь

Токи и напряжения удовлетворяют законам Кирхгофа:

$$I = I_{L_1} + I_{C_1}, \quad I = I_{L_2} + I_{C_2}, \quad U = U_{C_1} + U_{C_2}, \quad (1)$$

$$U_{L_1} = U_{C_1}, U_{L_2} = U_{C_2}, \quad (2)$$

а также уравнениям колебаний элементов цепи

$$I_{C_1} = C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt}, \quad I_{C_2} = C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt}, \quad (3)$$

$$U_{L_1} = \frac{d}{dt}(L_1 I_{L_1} + M I_{L_2}) + \phi_1(I_{L_1}, I_{L_2}), \quad (4)$$

$$U_{L_2} = \frac{d}{dt}(L_2 I_{L_2} + M I_{L_1}) + \phi_2(I_{L_1}, I_{L_2}).$$

Нелинейные функции $\phi_1(I_{L_1}, I_{L_2})$, $\phi_2(I_{L_1}, I_{L_2})$ в (3) характеризуют омические потери напряжения в индуктивных ветвях.

В (4) $L_1, L_2 > 0$ - индуктивности катушек, $C_1, C_2 > 0$ - емкости конденсаторов; M - взаимная индуктивность, которая представляется в виде $M = k\sqrt{L_1 L_2}$, $0 < k \leq 1$. Будем рассматривать случай идеального трансформатора, т.е. коэффициент $k = 1$. Исключим с помощью уравнений (1), (2), (3) неизвестные U , U_{L_i} , I_{L_i} , I_{C_i} , $i = 1, 2$. В качестве переменных компонент вектора состояний u выберем напряжения U_{C_1} , U_{C_2} :

$$u = (u_1, u_2)^T = (U_{C_1}, U_{C_2})^T. \quad (5)$$

Тогда уравнения (4) в пространстве R^2 записываются в векторной форме в следующем виде

$$[Au(t)]' + Cu(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \geq t_0, \quad (6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} L_1 C_1 & M C_2 \\ M C_1 & L_2 C_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(t, u(t), u'(t)) = \begin{pmatrix} (L_1 + M) \frac{dI}{dt}(t) \\ (L_2 + M) \frac{dI}{dt}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi_1(I(t) - C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt}, I(t) - C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt}) \\ \phi_2(I(t) - C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt}, I(t) - C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt}) \end{pmatrix}$$

Матрица A не имеет обратной, т.к. $\det A = 0$. Согласно классификации [2-5] получено вырожденное полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка в R^2 . Предполагается, что в моменты времени $t_k < t_{k+1}$, $k \in N$ из полуоси $t > t_0$ электрическая цепь подвергается кратковременным внешним импульсным воздействием на элементы цепи по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \Delta u|_{t=t_k} &= J_{1,k}(u(t_k - 0), u'(t_k - 0)), \\ \Delta u'|_{t=t_k} &= J_{2,k}(u(t_k - 0), u'(t_k - 0)), \quad k \in N. \end{aligned} \quad (7)$$

Напомним, что входной ток $I(t)$ есть известная функция, возможно со скачками в моменты времени t_k .

Для уравнения (6) зададим начальные условия

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u'_0. \quad (8)$$

Известно [5], что для дифференциально-алгебраических уравнений первого и более высокого порядков с импульсными воздействиями начальная задача разрешима, если выполнены специальные условия на правую часть уравнения, начальный вектор и импульсные функции.

4. Теоремы существования и единственности.

В дальнейшем исследуется уравнение вида (6) в пространстве R^n . Здесь A , C - $(n \times n)$ -матрицы с коэффициентами из поля вещественных чисел; матрица A , вообще говоря, вырожденная; моменты времени импульсных воздействий t_k вместе с начальным моментом времени t_0 упорядочены следующим образом: $t_{k-1} < t_k$, $k \in N$ и имеют точку сгущения на бесконечности.

Функция $f(t, u, u') : [t_0, \infty) \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ непрерывна по переменной t на множестве J , $J = ([t_0, \infty) \setminus \{t_k\})$, $k = 1, 2, \dots$, непрерывна слева по t в точках t_k и, возможно, имеет разрывы первого рода относительно переменной t в точках $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, зависящие от переменных u , u' . По переменным $u, u' \in R^n$ функция $f(t, u, u')$ предполагается всюду непрерывной, причём порядок гладкости отдельных компонент функции уточняется в теореме 2.

Функции $J_{i,k}$, $i=1,2$, $k \in N$ в (7) действуют из декартового произведения $R^n \times R^n$ в R^n .

Предполагается, что пучок матриц $\lambda A + C$ регулярен, т.е. $\det(\lambda A + C) \neq 0$.

По аналогии с [2] вводится класс Λ кусочно-непрерывно дифференцируемых вместе с первой производной функций $u(t)$ на полуинтервале $[t_0, \infty)$ с разрывами первого рода у функции $u(t)$ и её производной $u'(t)$ в моменты времени t_k , и таких, что функция $Au(t)$ дважды непрерывно дифференцируема при $t \neq t_k$, $k \in N$. Под $u'(t_k)$ понимается предел слева $\lim_{t \rightarrow t_k - 0} u'(t) = u'(t_k - 0)$, хотя сама производная $u'(t)$ при $t = t_k$ может не существовать. Функции $u(t)$, $u'(t)$ нормируются в точках t_k так, что они являются непрерывными слева.

Решением уравнения (6) с импульсными воздействиями (7) в точках t_k называется функция $u(t) \in \Lambda$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) при $t \neq t_k$ и условиям (7). Решение начальной задачи (6), (7), (8) есть решение уравнения (6), с импульсными воздействиями (7), которое удовлетворяет начальному условию (8).

Согласно лемме 3.2 [7] введём спектральные проекторы P_1 , Q_1 и дополнительные проекторы P_2 , Q_2 линейного пучка матриц $\lambda A + C$ размера $n \times n$ (E - единичная матрица):

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda A + C)^{-1} A d\lambda, \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} A (\lambda A + C)^{-1} d\lambda, \quad (9)$$

$$P_2 = E - P_1, \quad Q_2 = E - Q_1.$$

Контур Γ охватывает все собственные числа линейного пучка $\lambda A + C$.

Отметим, что характеристический многочлен левой части дифференциального уравнения (6) является неполным квадратичным матричным пучком $\beta^2 A + C$.

В работе [7] спектральные проекторы (9) строятся в комплексном пространстве, но в случае вещественных матриц A и C , проекторы P_1 , Q_1 также будут иметь вещественные коэффициенты [2].

Здесь используются следующие матрицы:

$$G = AP_1 + CP_2, \quad F = G^{-1}Q_2A, \quad S = G^{-1}Q_1C, \quad (10)$$

которые введены в [3].

Наибольшая длина r цепочки из собственного и присоединённых векторов пучка матриц $\mu C + A$ в точке $\mu = 0$ называется индексом пучка матриц $\lambda A + C$ и обозначается $r = \text{ind}\{A, C\}$ [2]. Положим $\nu = \max\{1, r\}$, где $r = \text{ind}\{A, C\}$.

Предварительно рассмотрим уравнение (6) без импульсных воздействий на отрезке $a \leq t \leq b$ с заданными начальными условиями $u(a) = u_a$, $u'(a) = u'_a$.

Теорема 1. Пусть линейный пучок матриц $\lambda A + C$ регулярен, функция $f(t, u, u')$ удовлетворяет условию Литишица по переменным u , $u' \in R^n$ с константами, не зависящими от t , проекция $Q_2 f(t, u, u') = h(t)$ не зависит от

$u, u',$ функции $\frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} F^j G^{-1} Q_2 h(t) \in C([a, b], R^n), j = 0, \dots, v-1$. Предположим, что для вектор-функции

$$\Psi(t) = \sum_{j=0}^{v-1} (-1)^j \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} [F^j G^{-1} Q_2 h(t)], \quad (11)$$

выполнены условия на начальные данные u_a, u'_a

$$\Psi(a) = P_2 u_a, \quad \Psi'(a) = P_2 u'_a. \quad (12)$$

Тогда уравнение (6) имеет единственное решение $u(t)$ на отрезке $a \leq t \leq b$ с заданными начальными условиями $u(a) = u_a, u'(a) = u'_a$.

Доказательство. Воспользовавшись матричными спектральными проекторами (9) и матрицей G^{-1} , как в [3], получим, что уравнение (6) эквивалентно двум уравнениям

$$[P_1 u(t)]' + SP_1 u(t) = G^{-1} Q_1 f(t, u(t), u'(t)), \quad (13)$$

$$[FP_2 u(t)]' + P_2 u(t) = G^{-1} Q_2 f(t, u(t), u'(t)). \quad (14)$$

Используем условие теоремы $Q_2 f(t, u, u') = h(t)$, получим что (14) принимает следующий вид

$$[FP_2 u(t)]' + P_2 u(t) = G^{-1} Q_2 h(t). \quad (15)$$

Матрица F нильпотентна с индексом нильпотентности v (лемма 1 [2]). Переносим рассуждения из теоремы 1 [2], из (15) последовательно получаем, что вторая компонента $P_2 u(t)$ решения $u(t)$ на отрезке $[a, b]$ совпадает с функцией Ψ (11):

$$P_2 u(t) = \Psi(t). \quad (16)$$

Условия (12) на начальные данные являются необходимыми для существования решения задачи (6), (8) на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим уравнение для первой компоненты $P_1 u(t)$ решения $u(t)$. Подставим $P_2 u(t) = \Psi(t)$ в уравнение (13)

$$[P_1 u(t)]' = -SP_1 u(t) + G^{-1} Q_1 f(t, P_1 u(t) + \Psi(t), [P_1 u(t)]' + \Psi'(t)), t \in [a, b], \quad (17)$$

и проведём понижение порядка.

Введём вектор $y = (y_1, y_2)^T$, где $y_1 = P_1 u(t), y_2 = [P_1 u(t)]'$. Тогда

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = -Sy_1 + G^{-1} Q_1 f(t, y_1 + \Psi(t), y_2 + \Psi'(t)).$$

В векторном виде получим следующее уравнение:

$$y' = \mathcal{F}(t, y), \quad t \in [a, b], \quad (18)$$

где

$$\mathcal{F}(t, y) = (y_2, -Sy_1 + G^{-1} Q_1 f(t, y_1 + \Psi(t), y_2 + \Psi'(t)))^T.$$

Согласно [10], существует единственное решение задачи Коши для уравнения (18) на отрезке $[a, b]$ при любом начальном векторе $y_0 \in R^{2n}$, в частности и для вектора $y_0 = (P_1 u_0, P_1 u'_0)$.

Суммируя обе компоненты решения $P_1u(t)$ и $P_2u(t)$, получим единственное решение уравнения (6) на отрезке $[a, b]$ с начальными условиями $u(a) = u_a$, $u'(a) = u'_a$, удовлетворяющими ограничениям (12).

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть линейный пучок матриц $\lambda A + C$ является регулярным, функция $f(t, u, u')$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $u, u' \in R^n$ с константами, не зависящими от t , проекция $Q_2 f(t, u, u') = h(t)$ не зависит от u, u' , выполнены условия гладкости для функций $\frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} F^j G^{-1} Q_2 h(t) \in C((t_{k-1}, t_k], R^n)$, $j = 0, \dots, \nu - 1$, $k = 1, 2, \dots$ и существуют конечные пределы справа у этих функций в точках t_k , $k = 1, 2, \dots$. Пусть выполнены условия согласования импульсных воздействий и скачков правой части уравнения (6):

$$P_2 J_{1,k} (P_1 u + \Psi(t_k), P_1 v + \Psi'(t_k)) = \Delta \Psi|_{t=t_k}, \quad (19)$$

$$P_2 J_{2,k} (P_1 u + \Psi(t_k), P_1 v + \Psi'(t_k)) = \Delta \Psi'|_{t=t_k},$$

$$\forall u, v \in R^n$$

в моменты импульсных воздействий t_k , а также выполнены условия

$$\Psi(t_0) = P_2 u_0, \quad \Psi'(t_0) = P_2 u'_0 \quad (20)$$

на начальные векторы u_0, u'_0 .

Тогда задача (6), (7), (8) имеет единственное решение $u(t)$ на полуоси $t \geq t_0$.

Доказательство. На отрезке $[t_0, t_1]$ в силу теоремы 1 существует единственное решение уравнения (6) с начальными условиями (8). Далее, в моменты импульсных воздействий последовательно на полуинтервалах $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$u(t_k + 0) = u(t_k) + J_{1,k}(u(t_k), u'(t_k)), \quad (21)$$

$$u'(t_k + 0) = u'(t_k) + J_{2,k}(u(t_k), u'(t_k)).$$

Применим к левой и правой частям равенств (21) проектор P_2 . В силу (19) на начале полуинтервала $(t_k, t_{k+1}]$ выполнены условия на начальные данные типа (12). По теореме 1 решение $u(t)$ существует и единственно на полуинтервале $(t_k, t_{k+1}]$.

Объединяя решения на полуинтервалах $(t_k, t_{k+1}]$ по всем $k = 1, 2, \dots$, получаем решение $u(t)$ задачи (6),(7),(8) на полуоси $t \geq t_0$, единственное в классе Λ .

Теорема доказана.

5. Анализ переходных режимов электрической цепи на Рис.1

Применим полученные результаты к исследованию переходных режимов нелинейной электрической цепи, изображённой на Рис.1. Проверим выполнение условий теоремы 2. Приведём для конкретной задачи (6),(7),(8) условия

согласования (19) на напряжения U_{C_1}, U_{C_2} и токи I_{L_1}, I_{L_2} в электрической цепи на Рис.1. Будем рассматривать случай вырожденной матрицы A , когда $M^2 = L_1 L_2$. Эта ситуация встречается при рассмотрении идеального трансформатора, когда $k = 1$.

Пучок $\lambda A + C$ регулярен, т.к. при $\lambda = 0$ $\det(\lambda A + C) \neq 0$. Для матриц A и C резольвента записывается следующим образом:

$$(\lambda A + C)^{-1} = \frac{1}{\lambda(L_2 C_2 + L_1 C_1) + 1} \begin{pmatrix} \lambda L_2 C_2 + 1 & -\lambda M C_2 \\ -\lambda M C_1 & \lambda L_1 C_1 + 1 \end{pmatrix},$$

Матричные проекторы (9) имеют вид

$$P_1 = Q_1 = \frac{1}{L_1 C_1 + L_2 C_2} \begin{pmatrix} L_1 C_1 & M C_2 \\ M C_1 & L_2 C_2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = Q_2 = \frac{1}{L_1 C_1 + L_2 C_2} \begin{pmatrix} L_2 C_2 & -M C_2 \\ -M C_1 & L_1 C_1 \end{pmatrix},$$

Вспомогательные матрицы G, G^{-1}, S из (10) записываются так

$$G = \begin{pmatrix} L_1 C_1 + \frac{L_2 C_2}{L_1 C_1 + L_2 C_2} & M C_2 - \frac{M C_2}{L_1 C_1 + L_2 C_2} \\ M C_1 - \frac{M C_1}{L_1 C_1 + L_2 C_2} & L_2 C_2 + \frac{L_1 C_1}{L_1 C_1 + L_2 C_2} \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 (L_1 C_1 + L_2 C_2)}{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2} & -\frac{M C_2 (L_1 C_1 + L_2 C_2) - M C_2}{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2} \\ -\frac{M C_1 (L_1 C_1 + L_2 C_2) - M C_1}{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2} & \frac{L_2 C_2 + L_1 C_1 (L_1 C_1 + L_2 C_2)}{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{L_1 C_1}{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2} & \frac{M C_2}{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2} \\ \frac{M C_1}{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2} & \frac{L_2 C_2}{(L_1 C_1 + L_2 C_2)^2} \end{pmatrix},$$

матрица $F = 0$ и индекс пучка $\nu = 1$. Таким образом, вектор (11) имеет вид $\Psi(t) \equiv 0$.

Проверим выполнение условий теоремы 2.

Выберем нелинейные функции $\phi_1(I_{L_1}, I_{L_2}) = L_1 \psi_1(I_{L_1}, I_{L_2}) + M \psi_2(I_{L_1}, I_{L_2})$, $\phi_2(I_{L_1}, I_{L_2}) = M \psi_1(I_{L_1}, I_{L_2}) + L_2 \psi_2(I_{L_1}, I_{L_2})$. Пусть функции $\psi_1(I_{L_1}, I_{L_2})$, $\psi_2(I_{L_1}, I_{L_2})$, характеризующие омические потери напряжения в индуктивностях, являются непрерывными функциями и удовлетворяют условию Липшица по переменным I_{L_1}, I_{L_2} во всём R .

В силу выбора функций $\phi_1(I_{L_1}, I_{L_2})$, $\phi_2(I_{L_1}, I_{L_2})$ проекция правой части $Q_2 f(t, u, u') = 0$ и не зависит от u, u' .

Входной ток $I(t)$ непрерывно дифференцируем на множестве J , и, возможно, имеет разрывы первого рода в моменты времени $t = t_k$ и $\frac{dI}{dt}(t)$ имеет пределы справа и слева в моменты t_k .

Ограничения (20) на начальные векторы u_0 и u'_0 , которые связывают напряжения U_{C_1}, U_{C_2} в начальный момент t_0 , записываются следующим образом:

$$L_2 U_{C_1}(t_0) - M U_{C_2}(t_0) = 0, \quad (22)$$

$$L_2 \frac{d}{dt} U_{C_1}(t_0) - M \frac{d}{dt} U_{C_2}(t_0) = 0, \quad (23)$$

далее воспользуемся равенствами (3) и перепишем (23), получим связь токов на конденсаторах

$$L_2 C_1^{-1} I_{C_1}(t_0) - M C_2^{-1} I_{C_2}(t_0) = 0. \quad (24)$$

Условия согласования (19) связывают напряжения U_{C_1}, U_{C_2} и токи I_{C_1}, I_{C_2} соотношениями

$$L_2 U_{C_1}(t_k + 0) - M U_{C_2}(t_k + 0) = 0, \quad (25)$$

$$L_2 C_1^{-1} I_{C_1}(t_k + 0) - M C_2^{-1} I_{C_2}(t_k + 0) = 0, \quad (26)$$

и задают ограничения на импульсные воздействия

$$P_2 J_{1,k}(P_1 u, P_1 v) = 0, \quad P_2 J_{2,k}(P_1 u, P_1 v) = 0. \quad (27)$$

Соотношения (27) выполняются, например, если функции $J_{1,k}$ и $J_{2,k}$ $k \in N$ представимы в виде

$$J_{j,k}(u, u') = H_{1,j,k} u + H_{2,j,k} u', \quad j = 1, 2, \quad k \in N, \quad (28)$$

и $H_{1,j,k}, H_{2,j,k}$ есть перестановочные с проектором P_1 матрицы, т.е.

$$P_1 H_{1,j,k} = H_{1,j,k} P_1, \quad P_1 H_{2,j,k} = H_{2,j,k} P_1, \quad j = 1, 2, \quad k \in N.$$

Также соотношения (27) выполняются, если область значений функций $J_{1,k}$ и $J_{2,k}$ содержится в области $P_1 R^2$.

При выполнении соотношений (22), (24), а в моменты импульсных воздействий соотношений (25), (26), задача (6), (7), (8) для рассмотренной на Рис.1 нелинейной электрической цепи имеет единственное решение.

Вырожденность матрицы A в нашем случае означает, что напряжения U_{C_1}, U_{C_2} и токи I_{C_1}, I_{C_2} на конденсаторах должны удовлетворять в начальный момент времени t_0 ограничениям (22), (24), а в моменты импульсных воздействий скачки напряжения и тока на каждом конденсаторе не могут быть любыми, а должны удовлетворять (25), (26).

6. Численное решение задачи (6),(7),(8). Обоснование алгоритмов и реализация.

В работе [1] описывается численный метод нахождения приближенного решения системы явных обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Как показано в [3], для нахождения численного решения вырожденного уравнения невозможно использовать известные разностные методы. Это же замечание относится и к методу, описанному в [1]. В процессе численного решения возможен выход компонент решения P_1u , P_2u из соответствующих им подпространств P_1R^n , поэтому, как показано в [3], на каждом шаге численного метода необходимо использовать проектирующую матрицу P_1 для возврата компоненты решения в соответствующее ей подпространство.

Здесь разработана модификация метода Рунге-Кутты с последовательным повышением порядка точности. В предложенном численном методе используются формулы (16) и (17).

Рассмотрим уравнение (6) без импульсных воздействий на отрезке $[a, b]$ с начальными данными $u(a) = u_a$, $u'(a) = u'_a$. Зададим набор узлов (сетку) $\{\tau_i\}$ с шагом h следующим образом:

$$\tau_i = a + hi, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где u_i - значения сеточной функции в моменты времени τ_i .

Воспользуемся формулой (16) для получения значений сеточной функции P_2u_i . Подставим узлы τ_i в (16), получим

$$P_2u_i = \Psi(\tau_i).$$

В уравнении (17) сделаем замены $v(t) = P_1u(t)$ и $v'(t) = [P_1u]'(t)$. Для нахождения значений v_i сеточной функции применим метод Рунге-Кутты с погрешностью второго порядка к уравнению (17).

Следует заметить, что для применения метода Рунге-Кутты необходимо потребовать, чтобы функция $Q_1f(t, u, u')$ была дважды непрерывно дифференцируема по каждой переменной.

Имеем следующие итерационные формулы:

$$\begin{aligned} v_{i+\frac{1}{2}} &= P_1[v_i + \frac{h}{2}v'_i + \frac{h^2}{4}(-Sv_i + G^{-1}Q_1f(\tau_i, v_i + \Psi(\tau_i), v'_i + \Psi'(\tau_i)))], \\ v'_{i+\frac{1}{2}} &= P_1[v'_i + \frac{h}{2}(-Sv_i + G^{-1}Q_1f(\tau_i, v_i + \Psi(\tau_i), v'_i + \Psi'(\tau_i)))], \\ v_{i+1} &= P_1[v_i + hv'_i + \frac{h^2}{2}(-Sv_{i+\frac{1}{2}} + G^{-1}Q_1f(\tau_{i+\frac{1}{2}}, v_{i+\frac{1}{2}} + \Psi(\tau_{i+\frac{1}{2}}), v'_{i+\frac{1}{2}} + \Psi'(\tau_{i+\frac{1}{2}})))], \\ v'_{i+1} &= P_1[v'_i + h(-Sv_{i+\frac{1}{2}} + G^{-1}Q_1f(\tau_{i+\frac{1}{2}}, v_{i+\frac{1}{2}} + \Psi(\tau_{i+\frac{1}{2}}), v'_{i+\frac{1}{2}} + \Psi'(\tau_{i+\frac{1}{2}})))]. \end{aligned} \quad (29)$$

Векторы v_0 , v'_0 задаются с помощью начальных условий (8)

$$v_0 = P_1u_0, \quad v'_0 = P_1u'_0. \quad (30)$$

Значения невырожденной компоненты $P_1 u_i$ сеточной функции u_i получаются по следующим формулам $P_1 u_i = v_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. А значения для сеточной функции u_i получаются так $u_i = P_1 u_i + P_2 u_i$.

Применим указанную схему к задаче (6),(7),(8). Последовательно на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in N$ воспользуемся формулами (29),(30). В моменты времени $t = t_k$, $k = 1, 2, \dots$, чтобы получить начальные векторы для метода Рунге-Кутты в узлах t_k , используем импульсные воздействия (7). Имеем:

$$\begin{aligned} v_0 &= v_n + P_1 J_{1,i}(u_n, u'_n), \\ v'_0 &= v'_n + P_1 J_{2,i}(u_n, u'_n). \end{aligned}$$

Здесь v_n и v'_n - значения в момент времени t_k на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, а v_0 и v'_0 - новые начальные данные для формул (29) на следующем отрезке $[t_{i+1}, t_{i+2}]$.

Погрешность на каждом шаге в нахождении решения на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots$ составляет $O(h^2)$.

В моменты импульсных воздействий погрешность не меняется и переносится на начальные условия для уравнения (6) на следующем отрезке $[t_{i+1}, t_{i+2}]$. Следовательно, общая погрешность метода на всем промежутке решения задачи (6),(7),(8) составит $O(h)$.

Очевидно, что погрешность приведенного метода равна погрешности используемого метода Рунге-Кутты. А значит, используя методы Рунге-Кутты более высокого порядка точности, можно свести погрешность указанного метода к любой степени шага интегрирования h .

7. Вычислительный эксперимент.

Найдём численное решение для конкретных значений правой части и построим графики изменений токов и напряжений во времени для электрической цепи Рис.1.

Выберем начальные векторы $u_0 = (0, 0)^T$ и $u'_0 = (0, 0)^T$, начальный момент времени t_0 выберем равным нулю. Моменты импульсных воздействий выберем равными своему индексу $t_k = k$, $k \in N$. Коэффициенты емкости и индуктивности выберем так: $L_1 = 2$, $L_2 = 0.1$, $C_1 = C_2 = 1$. Входной ток подается по закону $I(t) = \cos(t)$. Пусть нелинейные утечки ϕ_1 , ϕ_2 определяются законами

$$\begin{aligned} \phi_1(I_{C_1}, I_{C_2}) &= L_1 \sin^2(I_{C_1}(t)) + M(1 - \cos(I_{C_2}(t))), \\ \phi_2(I_{C_1}, I_{C_2}) &= M \sin(I_{C_1}(t)) + L_2(1 - \cos(I_{C_2}(t))). \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим случай, когда импульсные воздействия действуют только на производную решения $u'(t)$, но нет импульсных воздействий на само решение $u(t)$:

$$J_{2,k}(u, u') = \|u\| P_1 u - \|u'\| P_1 u', \quad J_{1,k}(u, u') = 0, \quad k \in N.$$

Результаты вычислений представлены на графиках Рис.2. Скачок производной решения $u'(t)$ определяет скачок токов I_{C_i} , $i=1,2$ на конденсаторах и скачок токов I_{L_i} , $i=1,2$ на индуктивностях и не влияет на напряжения $U_{C_i} = U_{L_i}$, $i=1,2$. В моменты импульсных воздействий графики напряжений U_{L_1} и U_{C_1} сохраняют свою непрерывность, но будут иметь в эти моменты изломы. Указанные ограничения (22), (24), (25), (26) обусловлены физическими законами и не являются искусственными ограничениями математической модели.

Следует заметить, что ограничения (25), (26) удобно использовать для дополнительного контроля вычислений.

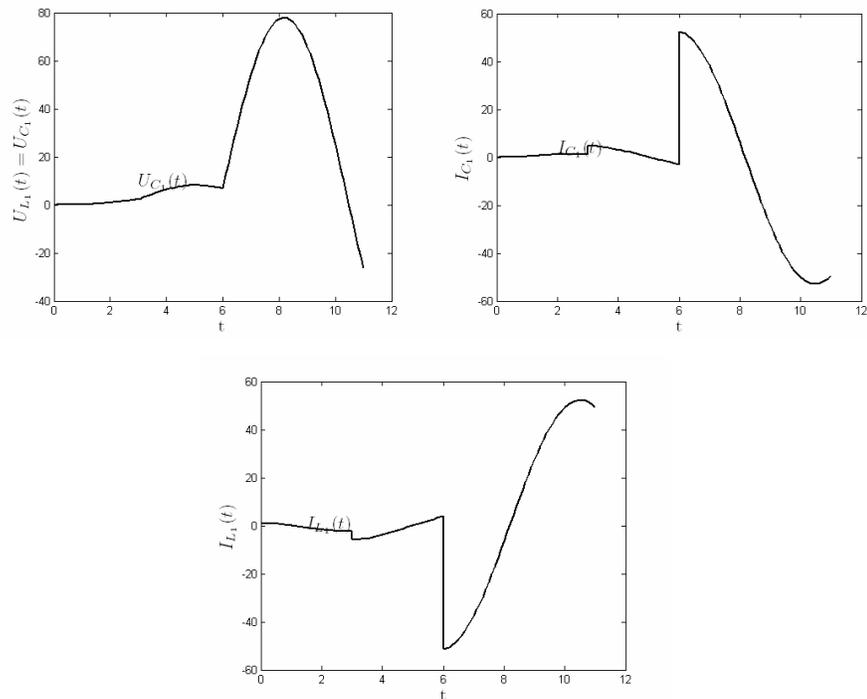


Рис. 2. Напряжения и токи на первом осцилляторе, где $L_1 = 2$ $L_2 = 0.1$ $C_1 = C_2 = 1$, входной ток подается по закону $I(t) = \cos(t)$, и нелинейные утечки описываются формулами (31)

8. Выводы

Электрическая цепь с импульсными воздействиями моделируется с помощью вырожденного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка с начальными и импульсными условиями. Получены достаточные условия для существования решения произвольного вырожденного полулинейного дифференциального уравнения с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени. Построен и обоснован численный метод для решения

полученной задачи. Разрабатываемый принцип моделирования и анализа переходных режимов демонстрируется на конкретной нелинейной электрической цепи с переменным внешним питанием и импульсными воздействиями на внутренние элементы цепи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.М. Randelovich, L.V. Stefanovich, B.M.Dancovich. Numerical solution of impulse differential equations. // *Facta Universitatis*. - 2000. № 15, 101-111p.
2. Власенко Л.А. Перестюк Н. А. О разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений с импульсным воздействием. // *Укр. мат. журнал*. - 2005. Т.57, 4, с.458-468.
3. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск. Системные технологии. 2006. 272с.
4. Власенко Л.А. Несвободные колебания бесконечномерного осциллятора при импульсных воздействиях. // *Украинский математический журнал*. 2008. Т 60, №2, 155-166с.
5. Власенко Л.А. Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями // *Дифференциальные уравнения*. 2008. Т 4, №2, 222-231с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. Наука, 1966. 576с.
7. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // *Дифференциальные уравнения*. 1975. Т 11, № 11, с. 1996-2910.
8. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Вища школа, 1987. 288с.
9. Трубицын А.В. Об одной математической модели с вырожденным дифференциальным уравнением второго порядка при импульсных воздействиях. // *Радиоэлектроника и Информатика*. 2006, №4, сс.44-47.
10. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М. Наука, 1981. 384с.